

Martin-Rand und $\mathcal{H}^p$ -Theorie harmonischer Räume

von
Klaus Janßen
aus
Beelitz

1969

Martin-Rand und $\mathcal{H}^p$ -Theorie harmonischer Räume

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Klaus Janßen

aus

Beelitz

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 26. November 1969

Dekan: Professor Dr. F.Tichy

Erstberichterstatter: Professor Dr. H.Bauer

Zweitberichterstatter: Professor Dr. G.Nöbeling

Inhalt

	Seite
Einleitung	1
§ 1 Vorbereitungen	4
§ 2 Martin-Rand	9
§ 3 Gleichmäßige Integrierbarkeit	25
§ 4 $\mathcal{H}^{\mathbb{D}}$ - Räume harmonischer Funktionen	34
§ 5 Randeigenschaften von $\mathcal{H}^{\mathbb{D}}$ - Funktionen	45
§ 6 Anwendungen	52
Literatur	61
Symbolliste	63



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Viele Aussagen über holomorphe bzw. komplexwertige harmonische Funktionen im Einheitskreis der Ebene erweisen sich als klassische Spezialfälle von allgemeiner gültigen Sätzen. So hat L.LUMER-NAIM [16] ⁽⁺⁾ für Brelotsche harmonische Räume eine $\mathcal{H}^p$ -Theorie entwickelt, die eine Verallgemeinerung der klassischen Theorie (vgl. K.HOFMANN [13]) darstellt.

Unter anderem ergeben sich hierbei Sätze vom Typ Phragmen Lindelöf (in denen für gewisse subharmonische Funktionen nachgewiesen wird, daß sie entweder beschränkt sind oder "sehr stark" anwachsen) sowie ein F. und M. Riesz - Theorem (Integraldarstellung harmonischer Funktionen durch Maße, die eine Dichte bezüglich eines vorgegebenen Maßes besitzen).

In dieser Arbeit werden die Ergebnisse von L.LUMER-NAIM auf harmonische Räume übertragen, die der Axiomatik von H.BAUER [1] genügen. Dabei sind die für [16] fundamentalen Begriffsbildungen des Martin-Randes und der gleichmäßigen Integrierbarkeit - die dort eng mit dem Brelotschen Konvergenzaxiom verknüpft sind - geeignet zu verallgemeinern. Dies gelingt durch die Einführung von Bezugsmaßen (vgl. Definition (1.1)), die an die Stelle von

(⁺) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis.

Einheitsmassen treten. Wesentliche Eigenschaft eines Bezugsmaßes r ist die Gültigkeit eines Konvergenzsatzes, der besagt, daß für jede isotone Folge r -integrierbarer harmonischer Funktionen die obere Einhüllende harmonisch ist, falls sie r -integrierbar ist.

Der Aufbau dieser Arbeit folgt weitgehend dem von [16]. Nach einigen Vorbereitungen wird der Martin-Rand eines harmonischen Raumes als Menge der extremalen Strahlen ⁽⁺⁾ des Kegels der positiven harmonischen Funktionen eingeführt und mit einer hausdorffschen Topologie versehen. Ähnlich wie bei M.SIEVEKING [21] wird in Abhängigkeit von einem Bezugsmaß r eine Integraldarstellung für positive r -integrierbare harmonische Funktionen durch reguläre Borelmaße ("Darstellungsmaße") auf dem Martin-Rand hergeleitet sowie ein Dirichlet-Problem für Funktionen auf dem Martin-Rand behandelt.

Anschließend wird die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von J.L.DOOB (vgl. [7]) bewiesen: Sind die Konstanten harmonisch und ist r ein normiertes Bezugsmaß, so ist eine positive harmonische Funktion genau dann r -gleichmäßig integrierbar, wenn sie die Lösung des Dirichlet-Problems bezüglich r für eine positive Funktion auf dem Martin-Rand ist.

⁽⁺⁾ Ein Element f eines Kegels C liegt auf einem extremalen Strahl von C , wenn für alle g und h aus C mit $g+h=f$ eine Zahl $a \gg 0$ existiert, so daß $g=af$ ist.

In den beiden folgenden Paragraphen werden Klassen $\mathcal{H}^{\Phi}(r)$ harmonischer Funktionen näher untersucht. Dabei bezeichnet $\mathcal{H}^{\Phi}(r)$ für eine positive Funktion Φ auf $\mathbb{R}_+$ die Menge der harmonischen Funktionen f , für die $\Phi(|f|)$ subharmonisch ist und eine r -integrierbare harmonische Majorante besitzt. Im Spezialfall $\Phi = \Phi_p: t \rightsquigarrow t^p$ ist $\mathcal{H}^{\Phi_p}(r)$ für $p > 1$ isometrisch zum Banachraum der (bezüglich des Darstellungsmaßes der harmonischen Funktion 1) p -fach integrierbaren Funktionen auf dem Martin-Rand. Die analoge Aussage gilt für eine weite Klasse konvexer Funktionen Φ .

Im abschließenden Paragraphen werden (wie in [16] IV) mit Hilfe der von L.GÄRDING, L.HÖRMANDER [10] eingeführten "strongly subharmonic functions" ein F. und M. Riesz-Theorem sowie ein Phragmen-Lindelöf-Prinzip hergeleitet. Dies wird am Beispiel der Wärmeleitungs-Gleichung erläutert und mit einem Ergebnis von M.H.PROTTER, H.F.WEINBERGER [18] verglichen.

Den Herren B.Anger, J.Bliedtner, J.Lembcke in Erlangen und Herrn Sieveking in Zürich danke ich für viele anregende Gespräche. Meinen besonderen Dank möchte ich meinem verehrten Lehrer Herrn Professor H.Bauer für seine Unterstützung bei dieser Arbeit aussprechen.

§ 1 Vorbereitungen

Im folgenden bezeichne $(X, \mathcal{H})$ stets einen harmonischen Raum, d.h. X ist ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis und $\mathcal{H}$ ein Garbendatum von Vektorräumen stetiger reeller Funktionen, das den Axiomen von H.Bauer [1] genügt. Sofern nicht eigens eingeführt, werden die Bezeichnungen aus [1] übernommen.

Es werden zunächst einige einfache Resultate für den harmonischen Raum $(X, \mathcal{H})$ bereitgestellt, die danach häufig verwendet werden.

(1.1) DEFINITION: Sei r ein positives Radonmaß auf X .

Ist dann X die kleinste Absorptionsmenge, die den Träger des Maßes r enthält, so heiße r Bezugsmaß (zu $(X, \mathcal{H})$). Ist überdies $r(1) = 1$, so heiße r normiertes Bezugsmaß.

Da X eine dichte Teilfolge enthält, existiert zu jeder harmonischen Funktion h ein normiertes Bezugsmaß r mit $\int h dr < \infty$. Wegen des Fehlens nicht-trivialer Absorptionsmengen ist in einem Brelotschen harmonischen Raum jedes positive Radonmaß ungleich Null ein Bezugsmaß.

(1.2) LEMMA: Sei (h_n) eine Folge positiver harmonischer Funktionen und r ein Bezugsmaß auf X . (h_n) konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von X gegen Null, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n dr = 0$ ist.

Insbesondere gilt für eine positive harmonische Funktion h auf X $\int h dr = 0$ genau dann, wenn $h = 0$ ist.

Beweis:

Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Harnackschen Ungleichung, denn zu jeder kompakten Teilmenge K von X existiert eine reelle Zahl $a_K(r)$ mit

$$\sup h(K) \leq a_K(r) \int h dr$$

für alle positiven harmonischen Funktionen h auf X (vgl. [1], 1.4.4).

Der zweite Teil ergibt sich, wenn man für (h_n) die konstante Folge (h) wählt.

(1.3) DEFINITION:

Ausschöpfung von X heiße jede Folge (U_n) offener relativ-kompakter Teilmengen von X mit $X = \bigcup U_n$ und $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(1.4) LEMMA:

Sei (U_n) eine Ausschöpfung von X , r ein Bezugsmaß h und (h_n) ($n \in \mathbb{N}$) seien r -integrierbare numerische Funktionen auf X mit den Eigenschaften

- i) h_n ist harmonisch in U_n ,
- ii) $(\text{Rest}_{U_n} h_{n+i})_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine aufsteigend filtrierende Folge, die auf U_n punktweise gegen h konvergiert.

Dann ist h harmonisch in X .

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Da (U_n) eine Ausschöpfung von X ist, genügt es zu zeigen, daß $\text{Rest}_{U_n} h$ harmonisch auf U_n ist.

$\text{Rest}_{U_n} h$ ist die Grenzfunktion einer aufsteigend filtrie-

renden Folge harmonischer Funktionen auf U_n , also hyperharmonisch auf U_n . Nach dem Konvergenzaxiom für harmonische Funktionen ist $\text{Rest}_{U_n} h$ harmonisch in U_n , falls die Menge

$$\{x \in U_n: h(x) < \infty\}$$

in U_n dicht liegt. Dies gilt insbesondere dann, wenn gilt:

$$A_h := \overline{\{x \in X: h(x) < \infty\}} = X.$$

Offenbar ist h hyperharmonisch in X , also ist A_h eine Absorptionsmenge in X . ([1], 1.4.2). Wegen $\int h d\mu < \infty$ ist der Träger des Maßes μ in A_h enthalten. Da μ als Bezugsmaß vorausgesetzt wurde, folgt $A_h = X$.

(1.5) LEMMA:

Sei (U_n) eine Ausschöpfung von X , μ ein Bezugsmaß und s eine μ -integrierbare subharmonische Funktion auf X . Setzt man für $n \in \mathbb{N}$

$$s_n(x) := \begin{cases} \int s d\mu_x^{U_n+1} & x \in \overline{U_n} \\ s(x) & x \in X \setminus \overline{U_n} \end{cases},$$

so ist (s_n) eine isotone Folge.

Ist die Funktion $u := \sup s_n$ μ -integrierbar, so ist u die kleinste harmonische Majorante von s .

u ist genau dann μ -integrierbar, wenn eine Konstante M existiert mit

$$\int_{\overline{U_n}} s_n(x) d\mu(x) \leq M \quad \text{für alle } n \text{ aus } \mathbb{N}.$$

Dann ist $\lim \int_{\overline{U_n}} s_n d\mu = \int u d\mu$.

Beweis:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die auf U_n definierte Funktion

$$x \rightsquigarrow \int s d\mu_x^{U_n}$$

die kleinste harmonische Majorante von $\text{Rest}_{U_n} s$, also ist

die Folge (s_n) isoton auf X . Da $\text{Rest}_{U_n} s_n$ harmonisch in U_n ist, folgt aus (1.4): Ist u r -integrierbar, so ist u harmonisch auf X .

u ist dann sogar die kleinste harmonische Majorante von s , denn für jede harmonische Majorante h von s gilt

$$\int s d\mu_{X^{n+1}}^U \leq \int h d\mu_{X^{n+1}}^U = h(x) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \bar{U}_n),$$

also auch

$$s_n(x) \leq h(x) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \bar{U}_n)$$

und daher $u = \sup s_n \leq h$.

b) Sei u r -integrierbar. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\bar{U}_n} s_n dr \leq \int_{\bar{U}_n} u dr \leq \int_{\bar{U}_n} |u| dr \leq \int |u| dr < \infty.$$

Umgekehrt folgt aus

$$\frac{\int s_n dr}{\bar{U}_n} \leq M \quad (n \in \mathbb{N})$$

wegen

$$0 \leq \frac{\int (s_n - s) dr}{\bar{U}_n} \quad \uparrow \quad \int (u - s) dr$$

die r -Integrierbarkeit von u sowie

$$\lim \frac{\int s_n dr}{\bar{U}_n} = \int u dr.$$

Die Beweise der folgenden beiden Lemmata kann man wörtlich aus der Arbeit von L.LUMER-NAIM ([16], III.Lemma 9, II.Lemma 3) übernehmen.

(1.6) LEMMA:

Sei u subharmonisch in X , ϕ eine isotone, konvexe reelle Funktion, die auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $u(X) \cup \{0\} \subset I$ definiert ist. Dann ist $\phi(u)$ in jedem der folgenden beiden Fälle subharmonisch:

- i) 1 ist harmonisch,
- ii) 1 ist superharmonisch und $\phi(o) \leq 0$.

(1.7) LEMMA:

Seien $u_1, u_2, \dots, u_n$ harmonische (oder positive subharmonische Funktionen auf X , $p \geq 1$ eine reelle Zahl.

Ist dann 1 superharmonisch, so ist die Funktion

$$x \rightsquigarrow \left(\sum_{i=1}^n u_i^2(x) \right)^{1/2} \quad (x \in X)$$

subharmonisch in X .

§ 2 Martin-Rand

In diesem Paragraphen wird in Abhängigkeit von einem Bezugsmaß r eine Integraldarstellung positiver r -integrierbarer harmonischer Funktionen durch reguläre positive Borelmaße auf dem Martin-Rand des harmonischen Raumes $(X, \mathcal{H})$ hergeleitet, wie sie sich auch bei M.Sieveking [21] findet.

Während in [21] nur solche Bezugsmaße betrachtet werden, deren Träger der Gesamtraum ist, wird hier von den in (1.1) definierten Bezugsmaßen ausgegangen. Insbesondere ist also $r = \xi_x$ ($x \in X$) für Brelotsche harmonische Räume zugelassen.

Anschließend wird ein Dirichlet-Problem für den Martin-Rand betrachtet, und es ergibt sich nach [21] eine Übertragung der von Gowrisankaran ([11], [12]) für Brelotsche harmonische Räume erstellten Theorie auf die hier vorliegende Situation.

${}_+\mathcal{H}_X$ sei die Menge der positiven harmonischen Funktionen auf X . Versehen mit der Topologie $\mathcal{T}_c$ der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X ist ${}_+\mathcal{H}_X$ vollständig metrisierbar und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie, d h.

${}_+\mathcal{H}_X$ ist ein polnischer Raum.

(2.1) DEFINITION:

Für ein Bezugsmaß r werden folgende Teilmengen von ${}_+\mathcal{H}_X$ betrachtet:

$$\mathcal{H}_r := \{h \in {}_+\mathcal{H}_X : \int h dr < \infty\},$$

$$\hat{\mathcal{H}}_r := \{h \in {}_+\mathcal{H}_X : \int h dr \leq 1\},$$

$$\Delta^r := \{h \in {}_+\mathcal{H}_X : \int h dr = 1\},$$

$$\Delta_e := \{h \in {}_+\mathcal{H}_X : h \not\equiv 0, h \text{ liegt auf einem extremalen Strahl von } {}_+\mathcal{H}_X\},$$

$$\Delta_e^r := \Delta^r \cap \Delta_e.$$

(2.2) BEMERKUNG:

Für Brelotsche harmonische Räume kann man $r = \epsilon_X$ wählen. Dann ist Δ^r eine kompakte Basis von ${}_+\mathcal{H}_X$. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist Δ^r für allgemeine harmonische Räume jedoch nicht notwendig kompakt.

(2.3) BEISPIEL:

Sei $\mathcal{H}$ das Garbendatum der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung in der Menge $X := \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, 0 < t < \infty\}$. $(X, \mathcal{H})$ ist ein harmonischer Raum, für den die konstante Funktion 1 harmonisch ist. Man setze

$\lambda :=$ Restriktion des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}_+$,

$$f(t) := \begin{cases} 0 & 0 < t \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}t^{-3/2} & \frac{1}{4} < t < \infty \end{cases},$$

$$r := \epsilon_0 \otimes (f\lambda).$$

Wegen

$$\int 1 dr = \frac{1}{4} \int_{1/4}^{\infty} t^{-3/2} dt = \frac{1}{4} [-2t^{-1/2}]_{1/4}^{\infty} = 1$$

und Träger von r gleich der Menge $\{0\} \times [1/4, \infty[$ ist dann r ein normiertes Bezugsmaß zu $(X, \mathcal{H})$, da jede Absorptionsmenge A in X die Gestalt $A = X$ oder $A = \mathbb{R} \times]0, t_0]$ mit $t_0 \in \mathbb{R}_+$ hat.

Nach M. SIEVEKING ([21], S.59) ist jede auf einem extremalen Strahl von ${}_+\mathcal{H}_X$ gelegene Funktion Vielfaches der Funktion

$$(x, t) \rightsquigarrow t^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4t}\right) \quad (x, t) \in X, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Sei

$$n_a(x, t) := \begin{cases} \frac{a^2}{1 - \exp(-a^2)} t^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4t}\right) & a \neq 0 \\ t^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) & a = 0 \end{cases}.$$

Für $a \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} \int h_a dr &= \frac{1}{4} \frac{a^2}{1 - \exp(-a^2)} \int_{1/4}^{\infty} t^{-2} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right) dt \\ &= \frac{1}{4} \frac{a^2}{1 - \exp(-a^2)} \left[\frac{4}{a^2} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right) \right]_{1/4}^{\infty} = 1. \end{aligned}$$

Überdies ist $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a \neq 0}} \frac{a^2}{1 - \exp(-a^2)} = 1$ und

$$\int h_0 dr = \frac{1}{4} \int_{1/4}^{\infty} t^{-2} dt = 1.$$

Insbesondere sind also alle extremalen harmonischen Funktionen r -integrierbar, und es ist

$$\Delta_e^r = \{ h_a(x, t) : a \in \mathbb{R} \}.$$

Δ^r ist nicht abgeschlossen, da $0 \notin \Delta^r$, aber für jede gegen ∞ konvergierende Folge $(a_i) \subset \mathbb{R}$ ist

$$(h_{a_i}) \subset \Delta_e^r \subset \Delta^r$$

eine lokal-gleichmäßig gegen Null konvergente Folge.

(2.4) SATZ:

$\mathcal{H}_r^1$ ist ein Hut und überdies ein Simplex.

Beweis:

a) Gezeigt wird, daß $\mathcal{H}_r^1$ kompakt ist.

Nach H. BAUER ([1], 4.6.3) ist $\mathcal{H}_r^1$ gleichgradig stetig in X .

Außerdem gilt infolge der Harnackschen Ungleichung für jedes $x \in X$

$$0 \leq h(x) \leq a_x(r) \int h dr \leq a_x(r)$$

mit gewissen Konstanten $a_x(r)$ für alle $h \in \mathcal{H}_r^1$, also ist

$$\{h(x) : h \in \mathcal{H}_r^1\}$$

eine relativ-kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Somit ist nach dem Satz von Ascoli $\mathcal{H}_r^1$ relativ-kompakt in $+\mathcal{H}_X$.

Zu zeigen ist noch die Abgeschlossenheit von $\mathcal{H}_r^1$ in $+\mathcal{H}_X$.

Dazu sei (h_n) eine Folge in $\mathcal{H}_r^1$, die lokal-gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion h auf X konvergiert. Wegen der Metrisierbarkeit von $+\mathcal{H}_X$ ist nur noch zu zeigen, daß h in $\mathcal{H}_r^1$ liegt.

Nach dem Lemma von Fatou folgt

$$\int h dr \leq \liminf \int h_n dr \leq 1,$$

d.h. $h \in \mathcal{H}_r^1$.

b) Nach R.R. PHELPS ([19], prop.11.2) ist $\mathcal{H}_r^1$ ein Hut, denn die Abbildung

$$h \rightsquigarrow \int h dr$$

von $+\mathcal{H}_X$ in $\mathbb{R}_+$ ist additiv, positiv homogen und nach unten halbstetig (Lemma von Fatou).

c) Da $+\mathcal{H}_X$ bezüglich der von $+\mathcal{H}_X$ induzierten Ordnung ein Verband ist, folgt aus dem bisher Bewiesenen nach ([19], prop.11.3), daß $\mathcal{H}_r^1$ sogar ein Simplex ist.

(2.5) SATZ: (+)

Zu $h \in \Delta^r$ existiert genau ein positives reguläres Borelmaß μ_h auf Δ^r mit den folgenden Eigenschaften:

- i) $\mu_h(1)=1$, μ_h wird von der G_δ -Menge $\Delta_e^r \subset \mathcal{H}_r^1$ getragen.
- ii) $L(h) = \int L(k) d\mu_h(k)$ gilt für jede halbstetige affin-lineare Funktion L auf $\mathcal{H}_r^1$.

Ist umgekehrt μ ein reguläres positives Borelmaß auf Δ^r mit $\mu(1)=\mu(\Delta_e^r)=1$, so wird durch

$$h(x) := \int k(x) d\mu(k) \quad (x \in X)$$

eine harmonische Funktion $h \in \Delta^r$ definiert.

Beweis:

Nach N. BOURBAKI ([6], p.62, prop.22) ist das Joch von $\mathcal{H}_r^1$ für ein Element $f \in {}_+\mathcal{H}_X$ gegeben durch

$$p_{\mathcal{H}_r^1}(f) := \inf \{ a > 0 : f \in a\mathcal{H}_r^1 \} = \int f d\mu.$$

Daher ist wegen ([6], p.111, cor.1) die Menge

$$\{0\} \cup \Delta_e^r$$

gerade die Menge der Extrempunkte von $\mathcal{H}_r^1$. Die Behauptung folgt dann nach (2.4) aus dem Existenz- und Eindeutigkeits-

(+) Ein reguläres Borelmaß μ auf einem topologischen Raum

ist ein Maß auf der $\mathcal{G}$ -Algebra der borelschen Teilmengen, das endlich auf kompakten Teilmengen und von innen regulär bezüglich des Systems der kompakten Mengen ist.

Ein solches Maß μ wird von A getragen, falls für jede kompakte Menge K mit $K \cap A = \emptyset$ gilt: $\mu(K)=0$.

satz von Choquet - Meyer (vgl. [2], 3.2.3, 3.2.4, 4.3.5, 2.5.2), falls man berücksichtigt, daß für jedes $x \in X$ die Abbildung

$$k \rightsquigarrow k(x)$$

stetig auf ${}_+\mathcal{H}_X$ ist.

(2.6) DEFINITION:

Auf ${}_+\mathcal{H}_X \setminus \{0\}$ ist die Relation

$$h \ R \ h' : \iff \exists a > 0 \text{ mit } h = ah'$$

eine offene Äquivalenz-Relation, da für eine beliebige offene Menge $U \subset {}_+\mathcal{H}_X \setminus \{0\}$ die Gesättigte bzgl. R durch die offene Menge

$$\bigcup_{\lambda > 0} \lambda U$$

gegeben ist ([3], p.55, §5.2). Im folgenden sei

$$\underline{Q} := \frac{{}_+\mathcal{H}_X \setminus \{0\}}{R}$$

mit der Quotienten-Topologie versehen, $\underline{i}$ bezeichne die kanonische Abbildung von ${}_+\mathcal{H}_X \setminus \{0\}$ auf $\underline{Q}$.

(2.7) LEMMA:

$\underline{Q}$ ist ein topologischer Hausdorffraum.

Beweis:

Gezeigt wird, daß der Graph $G(R)$ der offenen Äquivalenzrelation R abgeschlossen in $({}_+\mathcal{H}_X \setminus \{0\}) \times ({}_+\mathcal{H}_X \setminus \{0\})$ ist, denn daraus folgt nach N.BOURBAKI ([3], p.88, prop.8) die Separiertheit von $\underline{Q}$.

Sei (H_n) eine beliebige Folge aus $G(R)$, die gegen ein Element

$$H \in ({}_+\mathcal{H}_X \setminus \{0\}) \times ({}_+\mathcal{H}_X \setminus \{0\})$$

konvergiert. Wegen der Metrisierbarkeit von ${}_+\mathcal{H}_X$ ergibt sich

die Abgeschlossenheit von $G(R)$, falls H in $G(R)$ liegt.

Nun ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$H_n = (\lambda_n h_n, h_n), \quad H = (g, h) \quad \text{mit} \\ h_n, g, h \in {}_+\mathcal{H}_X, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}.$$

Zu zeigen ist

$$g = \lambda h \quad \text{für ein gewisses } \lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}.$$

Da (H_n) gegen H konvergiert, strebt die Folge $(\lambda_n h_n)$ bzw. (h_n) gegen g bzw. h in der Topologie $\mathcal{T}_c$, insbesondere gilt also für jedes $x \in X$

$$\lim \lambda_n h_n(x) = g(x), \quad \lim h_n(x) = h(x).$$

Daher ist (λ_n) gegen ein $\lambda \in \mathbb{R}_+$ konvergent, und zwar ist

$$\lambda = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } h(x) \neq 0.$$

$g(x) = \lambda h(x)$ gilt dann sogar für alle $x \in X$, denn falls $h(x) = 0$ ist, folgt

$$g(x) = \lim (\lambda_n) (\lim h_n(x)) = 0.$$

Da $g \neq 0$ vorausgesetzt war, ist $\lambda \neq 0$ und somit $H \in G(R)$.

(2.8) FOLGERUNGEN:

Die Teilmengen $\bar{\Delta}_e^r := i(\Delta_e^r)$ und $\tilde{\Delta}_e^r := i(\tilde{\Delta}_e^r)$ von Q seien mit der Relativ-Topologie versehen. $\tilde{\Delta}_e^r$ heiße Martin-Rand zu $(X, \mathcal{H})$.

Δ_e^r ist eine G_{δ} -Menge in $\mathcal{H}_r^1$, insbesondere also ein polnischer Raum. Bezeichnet i_r die Restriktion von i auf Δ_e^r , so ist i_r eine stetige Injektion. In vielen Fällen ist i_r sogar ein Homöomorphismus von Δ_e^r auf $i_r(\Delta_e^r)$. Dies stimmt z.B. sicherlich dann, wenn Δ^r kompakt ist (wie für Brelot-sche harmonische Räume im Fall $r = \epsilon_x$). Auch im Beispiel

(2.25) der Wärmeleitungsgleichung liegt ein Homöomorphismus vor, (obwohl Δ^r nicht kompakt ist). Ob dies allgemein gilt, ist nicht bekannt.

Für ein beschränktes reguläres Borelmaß μ auf Δ_e^r ist dessen Bildmaß $i_r(\mu)$ ein beschränktes reguläres Borelmaß auf $\tilde{\Delta}_e$, das von $\tilde{\Delta}_e^r$ getragen wird.

Ist umgekehrt $\tilde{\mu}$ ein beschränktes reguläres Borelmaß auf $\tilde{\Delta}_e$, das von $\tilde{\Delta}_e^r$ getragen wird, so ist nach J. LEMBECKE [14] $\tilde{\mu} = i_r(\mu)$ für ein gewisses beschränktes Borelmaß μ auf Δ_e^r . Für diese Maße μ und $\tilde{\mu}$ gilt:

(2.9) SATZ:

Seien f auf Δ_e^r und $\tilde{f}$ auf $\tilde{\Delta}_e$ definierte positive numerische Funktionen mit

$$f(k) = \tilde{f}(i(k)) \quad \text{für } k \in \Delta_e^r.$$

f ist genau dann μ -integrierbar, wenn $\tilde{f}$ $\tilde{\mu}$ -integrierbar ist. Überdies gilt

$$\int f d\mu = \int \tilde{f} d\tilde{\mu}.$$

(2.10) DEFINITION:

Für jedes $x \in X$ sei folgende Funktion auf $\tilde{\Delta}_e$ definiert:

$$\tilde{K}_x^r(\tilde{k}) := \begin{cases} k(x) & \text{falls } k \in \Delta_e^r, i(k) = \tilde{k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt offenbar für jedes $x \in X$

$$\tilde{K}_x^r(i(k)) = k(x) \quad (k \in \Delta_e^r).$$

Berücksichtigt man weiterhin, daß zu jeder harmonischen Funktion h ein Bezugsmaß r existiert mit $\int h dr < \infty$, so ergibt sich aus (2.9) und (2.5) die folgende Integraldarstellung:

(2.11) SATZ:

a) Zu jeder harmonischen positiven Funktion h auf X gibt es ein Bezugsmaß r auf X und ein positives, beschränktes reguläres Borelmaß $\tilde{\mu}_h$ auf $\tilde{\Delta}_e$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\tilde{\mu}_h$ wird von $\tilde{\Delta}_e^r$ getragen,

ii) für jedes $x \in X$ ist $h(x) = \int \tilde{K}_x^r d\tilde{\mu}_h$.

Ist $\tilde{\mu}'_h$ ein zweites positives, beschränktes reguläres Borelmaß mit den Eigenschaften i) und ii), so gilt $\tilde{\mu}_h = \tilde{\mu}'_h$.

b) Ist umgekehrt $\tilde{\mu}$ ein positives, beschränktes reguläres Borelmaß auf $\tilde{\Delta}_e$ und r ein Bezugsmaß auf X , so daß $\tilde{\mu}$ von $\tilde{\Delta}_e^r$ getragen wird, so definiert

$$h(x) := \int \tilde{K}_x^r d\tilde{\mu} \quad (x \in X)$$

eine r -integrierbare harmonische Funktion auf X .

(2.12) DEFINITION:

Ist r ein Bezugsmaß und h eine positive, r -integrierbare harmonische Funktion, so werde das eindeutig bestimmte Borelmaß $\tilde{\mu}_h$ auf dem Martin-Rand als Darstellungsmaß (bezüglich r) zu h bezeichnet.

Die zu einer harmonischen Funktion - bzgl. verschiedener Bezugsmaße - existierenden Darstellungsmaße sind im allgemeinen nicht gleich. Ein Zusammenhang zwischen ihnen wird in der folgenden Bemerkung hergeleitet:

(2.13) BEMERKUNG:

Sei r_1 ein Bezugsmaß und h eine positive, r_1 -integrierbare harmonische Funktion. Für ein weiteres Bezugsmaß r_2 ist die Abbildung

$$f: k \rightsquigarrow \int k dr_2$$

von $\mathcal{H}_X$ in $\overline{\mathbb{R}}_+$ nach unten halbstetig (Lemma von Fatou).

f sei auf kompakten Teilmengen von $\Delta_e^{r_1}$ beschränkt.

(Dies gilt insbesondere dann, wenn f stetig und reellwertig

ist. Ist r_2 die Einheitsmasse in einem Punkt $x \in X$, so ist

f wegen der Harnackschen Ungleichung sogar auf $\Delta_e^{r_1}$ beschränkt.)

Dann ist insbesondere $\tilde{\Delta}_e^{r_1} \subset \tilde{\Delta}_e^{r_2}$. Setzt man

$$\tilde{f}(\tilde{k}) := \begin{cases} \frac{\int k dr_2}{\int k dr_1}, & \text{falls } k \in \tilde{k} \in \tilde{\Delta}_e^{r_1} \\ 0, & \text{falls } k \in \tilde{\Delta}_e \setminus \tilde{\Delta}_e^{r_1} \end{cases},$$

so gilt für $k \in \Delta_e^{r_1}$ $\tilde{f}(i(k)) = f(k)$.

Sei μ_h das zu h gehörige (bzgl. r_1 bestimmte) Darstellungs-

maß. Es ist $\tilde{\mu}_h = i_{r_1}(\mu_h)$ für ein gewisses positives, beschränktes Borelmaß μ_h auf $\Delta_e^{r_1}$. Da f auf kompakten Teilmengen von $\Delta_e^{r_1}$ als beschränkt vorausgesetzt wurde, definiert $f\mu_h$ ein positives reguläres Borelmaß auf $\Delta_e^{r_1}$ und somit

$$i_{r_1}(f\mu_h) = \tilde{f}\tilde{\mu}_h$$

ein positives reguläres Borelmaß auf $\tilde{\Delta}_e$, das von $\tilde{\Delta}_e^{r_1}$ getragen wird.

Für $k \in \tilde{k} \in \tilde{\Delta}_e^{r_2}$ gilt

$$\frac{k(x)}{\int k dr_1} = \frac{k(x)}{\int k dr_2} \cdot \frac{\int k dr_2}{\int k dr_1}$$

also ist

$$\tilde{K}_x^{r_1} = \tilde{K}_x^{r_2} \cdot \tilde{f} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Daraus ergibt sich

$$h(x) = \int \tilde{k}_x^T 1 \, d\tilde{\mu}_h = \int \tilde{k}_x^T 2 \, d(\tilde{f}\tilde{\mu}_h) \quad (x \in X).$$

$\tilde{f}\tilde{\mu}_h$ ist nicht notwendig ein beschränktes Maß; ist $\tilde{f}\tilde{\mu}_h$ -integrierbar, so ist $\tilde{f}\tilde{\mu}_h$ das zu h gehörige Darstellungsmaß bzgl. r_2 . Nach dem Satz von Fubini ist dies wegen

$$\int \tilde{k}_x^T 2 \, (\tilde{k}) \, dr_2(x) = 1 \quad (\tilde{k} \in \tilde{\Delta}_e^T)$$

genau dann der Fall, wenn h eine r_2 -integrierbare Funktion ist.

(2.14) BEMERKUNG:

Die Abhängigkeit des Darstellungsmaßes von einem Bezugsmaß vermeidet man formal, wenn man eine Integraldarstellung der harmonischen Funktionen mit Hilfe "konischer Maße" entwickelt (vgl. G. CHOQUET [8]).

Auf ${}_+\mathcal{H}_X$ stimmt die Topologie $\mathcal{T}_c$ der lokal-gleichmäßigen Konvergenz mit der von G. MOKCIBODZKI definierten T-Topologie überein (vgl. M. SIEVEKING [21], S. 18, Eigenschaft 8). Somit ergeben sich aus Kapitel I in [21] folgende Ergebnisse:

(2.15) Für $\tilde{k} \in \tilde{\Delta}_e$ wird durch

$$\mathcal{T}_{\tilde{k}} := \{ E \subset X : R_k^E \neq k \text{ für } k \in i^{-1}(\tilde{k}) \}$$

ein Filter auf X definiert. Da er feiner ist, als der Filter der Komplemente der relativ-kompakten Teilmengen von X , besitzt er leere Adhärenz.

$\mathcal{T}_{\tilde{k}}$ heiße co-feiner Umgebungsfilter von $\tilde{k}$.

Limiten einer auf X definierten Abbildung u längs eines Filters $\mathcal{T}_{\tilde{k}}$ werden durch

$$\underline{\lim_{x \rightarrow \tilde{k}} u(x)}$$

bezeichnet.

Mit Hilfe dieser Filter wird nun unter der folgenden Einschränkung ein Dirichlet-Problem betrachtet:

(2.16) VORAUSSSETZUNG:

r sei ein normiertes Bezugsmaß, und die 1 sei harmonisch.

(2.17) Bezeichnet $\tilde{\mu}_1$ das Darstellungsmaß (bzgl. r) zu 1, so wird $\tilde{\mu}_1$ von $\tilde{\Delta}_e^r$ getragen und ist ebenso wie $\tilde{K}_x^r \tilde{\mu}_1$ für jedes $x \in X$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

(2.18) Für eine numerische Funktion $\tilde{f}$ auf $\tilde{\Delta}_e$ sei

$$\underline{\mathcal{O}}_{\tilde{f}} := \{v \in \mathcal{H}_X^* : v \text{ ist nach unten beschränkt, } \tilde{\mu}_1\text{-fast überall ist } \liminf_{x \rightarrow \tilde{k}} v(x) \geq \tilde{f}(\tilde{k})\}$$

die Menge aller Oberfunktionen zu $\tilde{f}$. Jede Funktion

$v \in \underline{\mathcal{O}}_{\tilde{f}}$ mit $\int v dr < \infty$ ist wegen

$$\text{Träger}(r) \subset \overline{[v < \infty]} \subset X$$

eine superharmonische Funktion (vgl. (1.1), [1] 1.4.2).

Man setzt $\overline{H}_{\tilde{f}}(x) := \inf \{v(x) : v \in \underline{\mathcal{O}}_{\tilde{f}}\}$ und $\underline{H}_{\tilde{f}} := -\overline{H}_{-\tilde{f}}$.

(2.19) Ist $\inf \{\int v dr : v \in \underline{\mathcal{O}}_{\tilde{f}}\} = -\inf \{\int w dr : w \in \underline{\mathcal{O}}_{-\tilde{f}}\} < +\infty$, so heiße $\tilde{f}$ resolutiv (bzgl. r). Dann existieren superharmonische Funktionen in $\underline{\mathcal{O}}_{\tilde{f}}$ und $\underline{\mathcal{O}}_{-\tilde{f}}$, also sind $\overline{H}_{\tilde{f}}$ und $\underline{H}_{\tilde{f}}$ harmonisch und r -integrierbar. Aus $\underline{H}_{\tilde{f}} \leq \overline{H}_{\tilde{f}}$ und $\int (\overline{H}_{\tilde{f}} - \underline{H}_{\tilde{f}}) dr = 0$ folgt nach (1.2) sogar $\underline{H}_{\tilde{f}} = \overline{H}_{\tilde{f}}$. Man bezeichnet $H_{\tilde{f}} := \overline{H}_{\tilde{f}}$ als die Lösung des Dirichlet-Problems für $\tilde{f}$ bzgl. $\tilde{\Delta}_e$ und $\tilde{\mu}_1$.

Aus der Definition der Oberfunktionen folgt unmittelbar, daß für zwei numerische Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$, die $\tilde{\mu}_1$ -fast überall auf dem Martin-Rand gleich sind, $\overline{H}_{\tilde{f}} = \overline{H}_{\tilde{g}}$ ist.

Es gelten folgende Sätze:

(2.20) Für jede $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktion $\tilde{f}$ auf $\tilde{\Delta}_e$ ist

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{K}} \int \tilde{f} \tilde{K}_x^T d\tilde{\mu}_1 = \tilde{f}(\tilde{k}) \quad \tilde{\mu}_1\text{-fast überall.}$$

(2.21) Zu jeder positiven superharmonischen Funktion v auf X existiert eine $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktion $\tilde{f}$ auf $\tilde{\Delta}_e$ mit

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{K}} v(x) = \tilde{f} \quad \tilde{\mu}_1\text{-fast überall.}$$

Ist v ein Potential, so ist $\tilde{f}=0$ $\tilde{\mu}_1$ -fast überall.

(2.22) Für jede positive, beschränkte harmonische Funktion h ist $h = H_{\tilde{f}}$, wobei $\tilde{f}$ die nach (2.21) existierende f -Limes-Funktion ist.

(2.23) Jede $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktion $\tilde{f}$ auf $\tilde{\Delta}_e$ ist resolutiv, und es gilt

$$H_{\tilde{f}}(x) = \int \tilde{K}_x^T \tilde{f} d\tilde{\mu}_1 \quad (x \in X).$$

Umgekehrt ist jede resolute Funktion $\tilde{f}$ $\tilde{\mu}_1$ -integrierbar.

Beweis:

Die Sätze (2.20) bis (2.23) finden sich bis auf den zweiten Teil von (2.23) in [21]. Dieser ergibt sich jedoch folgendermaßen: Ist $\tilde{f}$ resolutiv, so besitzt eine beliebige Oberfunktion eine superharmonische Minorante $u \in \mathcal{O}_{\tilde{f}}$; u ist nach unten beschränkt, also existiert nach (2.21) eine $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktion $\tilde{u}$ auf $\tilde{\Delta}_e$ mit

$$\tilde{u} = \lim_{x \rightarrow \tilde{K}} u \quad \tilde{\mu}_1\text{-fast überall.}$$

Offenbar ist u eine Oberfunktion zu $\tilde{u}$. Daher gilt

$$\int \tilde{f} \tilde{K}_x^T d\tilde{\mu}_1 \leq \int \tilde{u} \tilde{K}_x^T d\tilde{\mu}_1 = H_{\tilde{u}}(x) \leq u(x)$$

und somit

$$\int \tilde{f} \tilde{K}_x^T d\tilde{\mu}_1 \leq H_{\tilde{f}}(x) .$$

Aus der Resolutivität von $\tilde{f}$ folgt dann

$$H_{\tilde{f}}(x) = \int \tilde{f} \tilde{K}_x^r d\tilde{\mu}_1 = \int_* \tilde{f} \tilde{K}_x^r d\tilde{\mu}_1 \quad (x \in X)$$

und somit nach dem Satz von Fubini aus der r -Integrierbarkeit

von $H_{\tilde{f}}$ die $\tilde{\mu}_1$ -Integrierbarkeit von $\tilde{f}$ (für $\tilde{k} \in \tilde{\Delta}_e^r$ ist $\int \tilde{K}_x^r dr = 1$).

(2.24) BEMERKUNG:

Ist $\tilde{f}$ eine $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktion auf $\tilde{\Delta}_e$, so ist wegen (2.23) und (2.11) das Darstellungsmaß (bzgl. r) der harmonischen Funktion $H_{\tilde{f}}$ durch $\tilde{f} \tilde{\mu}_1$ gegeben.

In den folgenden Paragraphen wird eine Characterisierung der harmonischen Funktionen gegeben, deren Darstellungsmaß eine Dichte bezüglich $\tilde{\mu}_1$ besitzt.

(2.25) BEISPIEL:

Es sollen nun die soeben eingeführten Begriffe an Hand des Beispiels (2.3) der Lösungen der Wärmeleitungs-Gleichung dargestellt werden:

a) Es wurde gezeigt, daß $\Delta_e^r = \{h_a : a \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller extremalen harmonischen Funktionen h mit $\int h dr = 1$ ist und daß jede extremale Funktion in ${}_+ \mathcal{H}_X$ Vielfaches einer derartigen Funktion h_a ist. Somit ist die Abbildung

$$a \rightsquigarrow \{\lambda h_a : \lambda > 0\}$$

eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf $\tilde{\Delta}_e$. Für $\tilde{h}_a \in \tilde{\Delta}_e$ ist eine Umgebungsbasis in $\tilde{\Delta}_e$ definiert durch das System der Mengen

$$U_{K,\varepsilon} := \{\tilde{h}_b : b \in \mathbb{R}, |h_a(x,t) - \lambda h_b(x,t)| \leq \varepsilon \text{ für } (x,t) \in K \\ \text{und geeignetes } \lambda > 0\},$$

wobei K die kompakten Teilmengen von X durchläuft und $\varepsilon > 0$ ist.

Aus der Gestalt der Funktionen h_a ersieht man, daß $\tilde{\Delta}_e$ ebenso wie Δ_e^r homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, d.h. der Martin-Rand von $(X, \mathcal{H})$ ist gleich dem topologischen Rand von X im $\mathbb{R}^2$. Der in der Integraldarstellung (2.11) auftretende Kern hat nach (2.10) die Gestalt

$$\tilde{K}_{(x,t)}^r(a) = c_a t^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4t}\right) \quad (a \in \mathbb{R}),$$

mit

$$c_a = \begin{cases} \frac{a^2}{1 - \exp(-a^2)} & a \neq 0 \\ 1 & a = 0 \end{cases}$$

b) In (2.15) wurde für ein Element a des Martin-Randes der co -feine Umgebungsfiler definiert als

$$\mathcal{T}_a = \{E \subset X : R_{h_a}^E \neq h_a\}.$$

Bezeichnet $\mathcal{U}(a,0)$ den Umgebungsfiler von $(a,0)$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$, so ist dieser Filter gröber als $\mathcal{T}_a$, denn für $U \in \mathcal{U}(a,0) \cap X$ gilt: h_a ist auf $X \setminus U$ beschränkt, also ist $R_{h_a}^U$ auf ganz X beschränkt und somit ungleich h_a , d.h. $U \in \mathcal{T}_a$.

Für

$$E := \{x \in X : h_a(x) > 1\}$$

ist $h_a \leq 1$ auf E , also ist $E \in \mathcal{T}_a$. $\mathcal{T}_a$ erweist sich daher als strikt feiner als $\mathcal{U}(a,0) \cap X$, da die Folge

$$(x_n, t_n) := (2n^{-3/4} + a, n^{-1})$$

in der euklidischen Topologie gegen $(a,0)$ konvergiert, aber

$$(x_n, t_n) \notin E$$

für alle hinreichend großen n gilt wegen

$$\lim h_a(x_n, t_n) = \lim n^{1/2} \exp(n^{-1/2}) = 0.$$

c) Bestimmung des Darstellungsmaßes $\tilde{\mu}_1$ der harmonischen Funktion 1 (bezüglich r):

Sei λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$. Wegen

$$\begin{aligned} & \int \tilde{K}_{(x,t)}^r(a) \frac{1 - \exp(-a^2)}{2a^2 \sqrt{\pi}} d\lambda(a) \\ &= \int \frac{\exp(-\frac{(x-a)^2}{4t})}{2\sqrt{\pi} t} d\lambda(a) = 1 \end{aligned}$$

und

$$\int \frac{1 - \exp(-a^2)}{2\sqrt{\pi} a^2} d\lambda(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \exp(-a^2) d\lambda(a) = 1$$

ist nach (2.11)

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{1 - \exp(-a^2)}{2\sqrt{\pi} a^2} \lambda.$$

Das Darstellungsmaß für eine extremale harmonische Funktion h_a ist nach (2.11) gegeben durch das Vielfache einer Einheitsmasse im Punkte a , ist also insbesondere singular bezüglich $\tilde{\mu}_1$.

§ 3 Gleichmäßige Integrierbarkeit

In diesem Paragraphen wird der von J.L.DOOB in die Potentialtheorie eingeführte Begriff der gleichmäßigen Integrierbarkeit auf die hier vorliegende Situation übertragen.

In [7] betrachtete M.BRELOT diesen Begriff auch für harmonische Räume, die der Axiomatik von H.BAUER (mit dem Konvergenzaxiom K_1 an Stelle von K_D) genügen. Die im folgenden gegebene Definition unterscheidet sich von der von M.Brelot dadurch, daß an die Stelle von Einheitsmassen ein Bezugsmaß für den harmonischen Raum $(X, \mathcal{H})$ tritt. (für einen Brelotschen Raum ist jede Einheitsmasse ein Bezugsmaß).

Es ergibt sich eine Verallgemeinerung der Sätze von J.L.Doob, die für Brelotsche harmonische Räume die alten Resultate enthält. Damit wird für harmonische Funktionen ein erster Zusammenhang zwischen gleichmäßiger Integrierbarkeit und Verhalten am Martin-Rand hergestellt.

Sei $(X_i, \Sigma_i, \mu_i)_{i \in I}$ eine Familie von Maßräumen, so daß $\sup \mu_i(X_i) < \infty$ ist. Für $i \in I$ sei f_i eine Σ_i -meßbare Funktion auf X_i . Nach P.A.MEYER ([17], II §2) ergibt sich

(3.1) SATZ:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i) (f_i) ist gleichmäßig integrierbar (bzgl. μ_i), d.h.
- $$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|f_i| \geq a} |f_i| d\mu_i = 0 \text{ gleichmäßig in } I.$$
- ii) Es ist $\sup_i \int |f_i| d\mu_i < \infty$ und für jede Wahl der Mengen $E_i(\varepsilon) \in \Sigma_i$ mit $\mu_i(E_i(\varepsilon)) < \varepsilon$ gilt
- $$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_i \int_{E_i(\varepsilon)} |f_i| d\mu_i \right) = 0.$$
- iii) Es existiert eine reelle isotone Funktion Φ auf $\mathbb{R}_+$ mit $\Phi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$ und
- $$\sup_i \int \Phi(|f_i|) d\mu_i < \infty.$$
- Φ kann überdies konvex gewählt werden.

Im folgenden gelte stets

(3.2) VORAUSSETZUNG:

Die konstante Funktion 1 ist superharmonisch, r ein normiertes Bezugsmaß und $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von X .

Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichne μ_i das folgendermaßen definierte (von U_{i+1}^* getragene) Radonmaß auf X :

$$\int f d\mu_i := \int \int f(y) d\mu_{X^{i+1}}^{U_{i+1}}(y) 1_{\overline{U_i}}(x) dr(x).$$

Wegen (3.2) ist offenbar stets $\mu_i(1) \leq 1$.

(3.3) DEFINITION:

Eine auf X definierte borelsche Funktion f heiße r -gleichmäßig integrierbar (kurz r -g.i.), falls die konstante Familie (f) gleichmäßig integrierbar ist bezüglich der Familie (μ_i) von Radon-Maßen auf X .

Aus (3.1) ergibt sich sofort

(3.4) FOLGERUNG:

Eine borelsche Funktion f ist genau dann r -gleichmäßig integrierbar, wenn eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

i) Gleichmäßig für $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\overline{U}_i} \int_{[|f| \geq a]} |f(y)| d\mu_x^{U_{i+1}}(y) dr(x) = 0.$$

ii) Es ist $\sup_i \int_{\overline{U}_i} \int |f| d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) < \infty$, sowie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_i \int_{\overline{U}_i} \int_{E_i} |f| d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) = 0$$

für jede Wahl borelscher Teilmengen E_i von X mit

$$\int_{\overline{U}_i} \int_{E_i} d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) < \varepsilon.$$

iii) Es existiert eine reelle (konvexe) isotone

Funktion Φ auf $\mathbb{R}_+$ mit $\Phi(0)=0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$ und

$$\sup_i \int_{\overline{U}_i} \int \Phi(|f|) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) < \infty.$$

Ist die Funktion $|f|$ subharmonisch in X und U eine offene relativ-kompakte Teilmenge von X , so ist

$$x \rightsquigarrow \int |f| d\mu_x^U \quad (x \in U)$$

die kleinste harmonische Majorante von $\text{Rest}_U |f|$ auf U .

Somit ist für eine derartige Funktion f die r -gleichmäßige Integrierbarkeit unabhängig von der speziellen Wahl der Ausschöpfung (U_i) .

(3.5) LEMMA:

Die harmonische Funktion u genüge der Bedingung

$$\sup_i \int_{\bar{U}_i} \int |u| \, d\mu_x^{U_{i+1}} \, dr(x) < \infty.$$

Dann ist u r -integrierbar, und die Funktion

$$x \rightsquigarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \int u^+ d\mu_x^{U_{i+1}}$$

ist die kleinste r -integrierbare, positive harmonische Majorante von u .

Dies gilt insbesondere dann, wenn u r -gleichmäßig integrierbar ist.

Beweis:

Wendet man auf die subharmonischen Funktionen $u^+ = \sup(u, 0)$ und $u^- = \sup(-u, 0)$ das Lemma (1.5) an, so folgt der erste Teil der Behauptung. Aus (3.4.ii) folgt der zweite Teil.

(3.6) SATZ (DOOB):

Für jede harmonische Funktion u sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) u ist r -gleichmäßig integrierbar.
- ii) Zu $\varepsilon > 0$ existieren r -integrierbare, nach unten beschränkte superharmonische Funktionen v_1, v_2 mit

$$-v_1 \leq u \leq v_2 \quad \text{und} \quad \int (v_1 + v_2) dr \leq \varepsilon.$$

Die Funktionen v_1 und v_2 können dabei sogar harmonisch gewählt werden.

Beweis:

a) Sei zunächst u eine r -gleichmäßig integrierbare harmonische Funktion. Für jede reelle Zahl $a > 0$ ist infolge der Voraussetzung (3.2) $u_a = \sup(u, -a)$ eine nach unten beschränkte

subharmonische Funktion. Wegen

$$-a \leq u_a \leq |u|$$

ist u_a r-g.i.. Nach (3.4.ii) und (1.5) besitzt u_a eine kleinste $\bar{r}$ -integrierbare harmonische Majorante h_a , für die offenbar $u \leq u_a \leq h_a$ ist.

Für $i \in \mathbb{N}$ und $x \in U_{i+1}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{u \leq -a} u_a d\mu_x^{U_{i+1}} - u(x) = \int_{[u \leq -a]} (u_a - u) d\mu_x^{U_{i+1}} \\ &\leq \int_{[|u| \geq a]} |u| d\mu_x^{U_{i+1}} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\bar{U}_i} \left(\int_{u \leq -a} u_a d\mu_x^{U_{i+1}} - u(x) \right) dr(x) \\ &\leq \int_{\bar{U}_i} \int_{[|u| \geq a]} |u| d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x). \end{aligned}$$

Da u als r-g.i. vorausgesetzt ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $a > 0$, so daß dieser Ausdruck für alle $i \in \mathbb{N}$ kleiner als $\varepsilon/2$ ist.

Nun ist für ein derartiges a nach (1.5)

$$0 \leq \int (h_a - u) dr = \lim_i \int_{\bar{U}_i} \left(\int_{u \leq -a} u_a d\mu_x^{U_{i+1}} - u(x) \right) dr(x) \leq \varepsilon/2.$$

Man setze $v_2 := h_a$; analog bestimme man zu $-u$ die Funktion v_1 . Wegen

$$\int (v_1 + v_2) dr = \int (v_1 - (-u)) dr + \int (v_2 - u) dr \leq \varepsilon$$

sind dann v_1 und v_2 Funktionen, die die Aussage ii) des Satzes erfüllen und überdies harmonisch sind.

b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt; v_1 und v_2 seien superharmonische Funktionen mit den in ii) angegebenen Eigenschaften.

Dann existiert eine Zahl $K > 0$ mit $-v_1 \leq K$ und $-v_2 \leq K$, also

$$|u| \leq v_1 + v_2 + K.$$

Somit gilt für alle $a \geq 0$ und $x \in U_{i+1}$ ($i \in \mathbb{N}$ beliebig) wegen der Positivität von $v_1 + v_2$

$$(*) \quad \int_{[|u| \geq a]} |u| d\mu_{x^{U_{i+1}}} \leq v_1(x) + v_2(x) + K \cdot \int_{[|u| \geq a]} d\mu_{x^{U_{i+1}}}$$

und daher

$$\int_{\bar{U}_i} \int_{[|u| \geq a]} |u| d\mu_{x^{U_{i+1}}} dr(x) \leq \epsilon + K =: K_0.$$

Insbesondere folgt für $a=0$ ($i \in \mathbb{N}$ beliebig)

$$\int_{\bar{U}_i} \int |u| d\mu_{x^{U_{i+1}}} dr(x) \leq K_0 < \infty.$$

Für beliebiges $a > 0$ ist dann

$$\int_{\bar{U}_i} \int_{[|u| \geq a]} a d\mu_{x^{U_{i+1}}} dr(x) \leq \int_{\bar{U}_i} \int_{[|u| \geq a]} |u| d\mu_{x^{U_{i+1}}} dr(x) \leq K_0,$$

also

$$\int_{\bar{U}_i} \int_{[|u| \geq a]} d\mu_{x^{U_{i+1}}} dr(x) \leq K_0/a.$$

Daher ergibt sich aus der Abschätzung (*) für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\int_{\bar{U}_i} \int_{[|u| \geq a]} |u| d\mu_{x^{U_{i+1}}} dr(x) \leq \epsilon + K K_0/a \leq 2\epsilon$$

für hinreichend großes a . Dies bedeutet aber gerade, daß u r -gleichmäßig integrierbar ist.

(3.7) KOROLLAR:

Eine positive, r -integrierbare harmonische Funktion u ist genau dann r -gleichmäßig integrierbar, wenn u quasi-beschränkt ist, d.h. wenn eine isotone Folge (u_n) beschränkter, harmonischer positiver Funktionen existiert mit $u = \sup u_n$.

Beweis:

Für die r-g.i. Funktion u ist $\inf(u, n)$ eine positive superharmonische Funktion mit einer größten harmonischen Minoranten u_n ($n \in \mathbb{N}$). Dann ist $h := \sup u_n$ wegen $h \leq u$ harmonisch und quasi-beschränkt.

Gezeigt wird, daß $h = u$ ist.

Dazu wähle man für $\varepsilon_n := 1/n$ die Funktionen $v_{1,n}$ und $v_{2,n}$ bezüglich u wie im vorangegangenen Satz. Für hinreichend großes $k = k(n)$ folgt

$$-v_{1,n} \leq u_k \leq h \leq u \leq v_{2,n}, \text{ sowie} \\ \int (u-h) dr \leq \int (u+v_{1,n}) dr \leq 1/n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Nach (1.2) folgt dann aus $h \leq u$ sogar $h = u$.

b) Die Umkehrung ergibt sich unmittelbar aus Satz (3.6), falls man $v_2 := u$ und $v_1 := -u_n$ für hinreichend großes $n = n(\varepsilon)$ wählt, da für jede isotone Folge (u_n) r-integrierbarer Funktionen, die punktweise gegen eine r-integrierbare Funktion u konvergiert, stets $\lim_n \int (u - u_n) dr = 0$ ist.

(3.8) SATZ (DOOB) :

Die konstante Funktion 1 sei harmonisch, $\tilde{\mu}_1$ sei das Darstellungsmaß zu 1 (bezüglich r) auf dem Martin-Rand $\tilde{\Delta}_e$ und u sei eine positive, r-integrierbare harmonische Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i) u ist r-gleichmäßig integrierbar.
- ii) Es existiert eine resolutive positive Funktion $\tilde{f}$ auf $\tilde{\Delta}_e$, so daß u die Lösung des Dirichlet-Problems für $\tilde{f}$ bezüglich $\tilde{\mu}_1$ ist.

Es ist dann $\tilde{f} = f\text{-}\lim u$ $\tilde{\mu}_1$ -fast überall auf $\tilde{\Delta}_e$.

Beweis:

a) Ist u r -gleichmäßig integrierbar, so existiert nach (3.7) eine isotone Folge (u_n) positiver, beschränkter harmonischer Funktionen mit $u = \sup u_n$.

Nach (2.21) gibt es positive $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktionen $\tilde{f}, \tilde{f}_n$ auf $\tilde{\Delta}_e$, so daß

$$\tilde{f} = f\text{-}\lim u, \quad \tilde{f}_n = f\text{-}\lim u_n$$

$\tilde{\mu}_1$ -fast überall auf dem Martin-Rand gilt ($n \in \mathbb{N}$).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind die Funktionen $\tilde{f}_n$ beschränkt und bilden eine isotone, gegen $\tilde{f}$ konvergente, Folge. Aus (2.23) ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(x) = H_{\tilde{f}_n}^{\tilde{f}}(x) = \int \tilde{K}_x^T \tilde{f}_n d\tilde{\mu}_1 \quad (x \in X),$$

also nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue

$$u = \int \tilde{K}^T \tilde{f} d\tilde{\mu}_1 = H_{\tilde{f}}^{\tilde{f}},$$

und u ist die Lösung des Dirichlet-Problems für $\tilde{f}$.

b) Ist umgekehrt $\tilde{f}$ eine resolutive Funktion auf dem Martin-Rand und u die Lösung des Dirichlet-Problems für $\tilde{f}$, so setze man für $n \in \mathbb{N}$ $\tilde{f}_n := \inf(\tilde{f}, n)$.

Dann sind die Folgen $(\tilde{f}_n)$ bzw. $(H_{\tilde{f}_n}^{\tilde{f}})$ isoton und konvergieren punktweise gegen $\tilde{f}$ bzw. $H_{\tilde{f}}^{\tilde{f}}$ (vgl. (2.23)).

Wegen der Integrierbarkeit von $H_{\tilde{f}}^{\tilde{f}}$ (vgl. (2.19)) folgt aus

$$0 \leq H_{\tilde{f}_n}^{\tilde{f}} \leq n$$

nach Korollar (3.7): $u = H_{\tilde{f}}^{\tilde{f}}$ ist r -gleichmäßig integrierbar.

Da mit g auch jede Funktion f r -gleichmäßig integrierbar ist, für die $|f| \leq |g|$ ist, folgt aus dem Satz (3.8) von Doob unmittelbar:

(3.9) KOROLLAR:

Ist $\tilde{g}$ eine positive resolutive Funktion auf dem Martin-Rand und f eine harmonische Funktion mit $0 \leq f \leq H_{\tilde{g}}$, so ist $f = H_{\tilde{f}}$ für eine $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f} = f\text{-}\lim f$ $\tilde{\mu}_1$ -fast überall.

(3.10) BEMERKUNG:

Es kann vorkommen, daß h eine positive, r -integrierbare harmonische Funktion ist, für die $f\text{-}\lim h$ $\tilde{\mu}_1$ -fast überall verschwindet, ohne daß $h=0$ gilt. Diese Situation liegt vor, falls das zu h gehörige Darstellungsmaß singulär zu $\tilde{\mu}_1$ ist (vgl. Beispiel (2.25.c)).

Beweis:

Sei das zu h gehörige Darstellungsmaß $\tilde{\nu}$ singulär bezüglich $\tilde{\mu}_1$. Nach (2.21) existiert eine $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktion $\tilde{h}$ auf dem Martin-Rand mit

$$\tilde{h} = f\text{-}\lim h \quad \tilde{\mu}_1\text{-fast überall.}$$

Wegen $h \geq 0$ ist dann h eine Oberfunktion zu $\tilde{h}$ (vgl. (2.18)) und daher $H_{\tilde{h}} \leq h$.

Bezeichnet $\tilde{\nu}_1$ das Darstellungsmaß zu $h - H_{\tilde{h}}$, so folgt aus

$$h = H_{\tilde{h}} + (h - H_{\tilde{h}})$$

für die zugehörigen Darstellungsmaße

$$\tilde{\nu} = \tilde{h}\tilde{\mu}_1 + \tilde{\nu}_1.$$

Da $\tilde{\nu}$ als singulär bezüglich $\tilde{\mu}_1$ vorausgesetzt wurde, gilt $\tilde{h}=0$ $\tilde{\mu}_1$ -fast überall auf dem Martin-Rand.

§ 4 $\mathcal{H}^{\mathbb{D}}$ -Räume harmonischer Funktionen

Wie im vorangegangenen Paragraphen sei die konstante Funktion 1 superharmonisch, r ein normiertes Bezugsmaß und (U_1) eine Ausschöpfung von X .

Es bezeichne $\mathbb{H}_X := \{u+iv: u, v \in \mathcal{H}_X\}$ die Menge der komplexwertigen harmonischen und $+\mathcal{H}_X$ die Menge der positiven subharmonischen Funktionen auf X . Im folgenden werden gewisse Mengen derartiger Funktionen betrachtet, deren Verhalten am Martin-Rand dann in §5 untersucht wird.

(4.1) DEFINITION:

Eine streng isotone positive Funktion $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{R}_+$ mit $\mathbb{D}(0)=0$ heiße isovex, falls sie konvex ist. $\mathbb{D}$ heiße streng isovex, wenn überdies $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{D}(t)}{t} = \infty$ ist.

Für jede isovexe Funktion $\mathbb{D}$ ist $0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{D}(t)}{t} \leq \infty$, da für alle $0 < t_0 \leq t$ gilt:

$$\mathbb{D}(t_0) = \mathbb{D}\left(\frac{t_0}{t} t + \left(1 - \frac{t_0}{t}\right) 0\right) \leq \frac{t_0}{t} \mathbb{D}(t)$$

(4.2) DEFINITIONEN:

Sei $\mathbb{D}$ eine positive Funktion auf $\mathbb{R}_+$ mit $\mathbb{D}(0)$

Die Funktion $s \in +\mathcal{H}_X$ gehöre zu $\mathcal{H}^{\mathbb{D}}(r)$, falls gilt:

- i) $\mathbb{D}(s)$ ist subharmonisch
- ii) $\mathbb{D}(s)$ besitzt eine harmonische r -integrierbare Majorante.

Nach (1.7) ist für jede harmonische Funktion $f \in \mathbb{H}_X$ die Funktion $|f|$ subharmonisch. Man setzt

$$\mathcal{H}^{\mathbb{W}}(r) := \{ f \in \mathcal{H}_X : |f| \in \mathcal{H}^{\mathbb{W}}(r) \} \quad (+) .$$

Für $f \in \mathcal{H}^{\mathbb{W}} \cup \mathcal{H}^{\mathbb{W}}_{+}$ bezeichne $\mathbb{W}\{|f|\}$ die kleinste harmonische Majorante zu $\mathbb{W}(|f|)$.

Für jede reelle Zahl $p > 0$ sei

$$\mathcal{H}^p := \mathcal{H}^{\mathbb{W}}_p \quad \text{und} \quad \mathcal{H}^p_{+} := \mathcal{H}^{\mathbb{W}}_{+p} ,$$

wobei $\mathbb{W}_p(t) := t^p$ ($t \geq 0$) bedeute; $\mathcal{H}^{\infty}_{+}$ bzw. $\mathcal{H}^{\infty}$ sei die Menge der beschränkten Funktionen aus $\mathcal{H}^{\infty}_{+}$ bzw. $\mathcal{H}^{\infty}$.

(4.3) BEMERKUNGEN:

- 1) Für $p=1$ (bzw. $p > 1$) ist die Funktion $\mathbb{W}_p: t \rightsquigarrow t^p$ ($t \geq 0$) isovex (bzw. streng isovex).
- 2) Ist $\mathbb{W}$ isovex und $f \in \mathcal{H}_X \cup \mathcal{H}^{\mathbb{W}}_X$, so ist $\mathbb{W}(|f|)$ nach (1.6) und (1.7) subharmonisch.
- 3) Sei $\mathbb{W}$ positiv und $f \in \mathcal{H}^{\mathbb{W}} \cup \mathcal{H}^{\mathbb{W}}_{+}$. Nach (1.5) ist dann

$$\int \mathbb{W}\{|f|\} \, dr = \sup_i \int_{U_i} \mathbb{W}(|f|) \, d\mu_{X,i+1}^U \, dr(x) < \infty .$$

Um nachzuweisen, daß eine Funktion in $\mathcal{H}^{\mathbb{W}}$ oder $\mathcal{H}^{\mathbb{W}}_{+}$ liegt, wird häufig der folgende Satz benutzt, der unmittelbar aus (1.5) folgt:

(4.4) SATZ:

Seien $\mathbb{W}$ eine positive Funktion auf $\mathbb{R}_{+}$ und $f \in \mathcal{H}^{\mathbb{W}}$ (bzw. $f \in \mathcal{H}^{\mathbb{W}}_{+}$) derart, daß $\mathbb{W}(|f|)$ subharmonisch ist. f liegt genau dann in $\mathcal{H}^{\mathbb{W}}$ (bzw. $\mathcal{H}^{\mathbb{W}}_{+}$), wenn es ein $M \geq 0$ gibt, so daß für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{U_i} \mathbb{W}(|f|) \, d\mu_{X,i+1}^U \, dr(x) \leq M .$$

(+) Im folgenden wird durchgehend von dem vorgegebenen Bezugsmaß r ausgegangen. Es bezeichne stets $\mathcal{H}^{\mathbb{W}}$ bzw. $\mathcal{H}^{\mathbb{W}}_{+}$ den Raum $\mathcal{H}^{\mathbb{W}}(r)$ bzw. $\mathcal{H}^{\mathbb{W}}_{+}(r)$.

(4.5) BEMERKUNG:

Ist $\mathbb{D}$ eine streng isovexe Funktion, so ist wegen (3.4.iii) jede Funktion $f \in \mathcal{H}^{\mathbb{D}} \cup \mathcal{H}^{\mathbb{D}}_{*}$ r-gleichmäßig integrierbar.

(4.6) KOROLLAR:

Für positive Funktionen $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_1$ auf $\mathbb{R}_+$ gilt:

- i) $f \in \mathcal{H}^{\mathbb{D}}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_0 := a\mathbb{D} + b \implies f \in \mathcal{H}^{\mathbb{D}_0}$.
- ii) $f \in \mathcal{H}^{\infty}$, $\mathbb{D}$ lokal-beschränkt, $\mathbb{D}(|f|) \in {}_{+*}\mathcal{H}_X \implies f \in \mathcal{H}^{\mathbb{D}}$.
- iii) $f \in \mathcal{H}^{\mathbb{D}}$, $0 \leq \mathbb{D}_1 \leq \mathbb{D}$, $\mathbb{D}_1(|f|) \in {}_{+*}\mathcal{H}_X \implies f \in \mathcal{H}^{\mathbb{D}_1}$.
- iv) $f \in \mathcal{H}^{\mathbb{D}}$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{D}(t)}{t} > 0 \implies f \in \mathcal{H}^1$.

Diese Aussagen bleiben richtig, wenn man die Räume $\mathcal{H}^{\bullet}$ jeweils durch $\mathcal{H}^{\bullet}_{*}$ ersetzt.

(4.7) KOROLLAR:

Für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt $\mathcal{H}^{\infty} \subset \mathcal{H}^q \subset \mathcal{H}^p \subset \mathcal{H}^1$ sowie $\mathcal{H}^{\infty}_{*} \subset \mathcal{H}^q_{*} \subset \mathcal{H}^p_{*} \subset \mathcal{H}^1_{*}$.

(4.8) BEMERKUNG:

Ist $\mathbb{D}$ eine isovexe, nicht streng isovexe Funktion, so folgt aus (4.3.2) und (4.6.iii) wegen $0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{D}(t)}{t}$

$$\mathcal{H}^{\mathbb{D}} = \mathcal{H}^1 \quad \text{und} \quad \mathcal{H}^{\mathbb{D}}_{*} = \mathcal{H}^1_{*}.$$

(4.9) LEMMA:

Für eine isovexe Funktion $\mathbb{D}$ ist jede reelle Funktion aus $\mathcal{H}^{\mathbb{D}}$ Differenz zweier positiver Funktionen aus $\mathcal{H}^{\mathbb{D}}$.

Beweis:

Sei $u \in \mathcal{H}^{\mathbb{D}}$. Nach (4.6.iv) ist $u \in \mathcal{H}^1$. Wegen (4.4) und (3.5)

ist

$$u_1(x) := \lim_i \int u^+ d\mu_x^{U_{i+1}} \quad (x \in X)$$

die kleinste r -integrierbare harmonische Majorante von

u^+ . Da für $x \in U_{i+1}$ ($i \in \mathbb{N}$)

$$u(x) = \int u^+ d\mu_x^{U_{i+1}} - \int u^- d\mu_x^{U_{i+1}}$$

gilt, genügt es nun zu zeigen, daß u_1 in $\mathcal{H}^{\mathbb{D}}$ liegt.

Nach (1.6) folgt aus der Konvexität von $\mathbb{D}$ die Subharmonizität von $\mathbb{D}(u_1)$.

Seien $i \in \mathbb{N}$ und $x \in U_{i+1}$ beliebig gewählt. Da 1 superharmonisch

ist, gilt $0 < c := \int d\mu_x^{U_{i+1}} \leq 1$, also ist $v := \frac{1}{c} \mu_x^{U_{i+1}}$ ein

Wahrscheinlichkeitsmaß. Die Konvexität von $\mathbb{D}$ und die

Jensensche Ungleichung ergeben dann

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \left(\int u^+ d\mu_x^{U_{i+1}} \right) &= \mathbb{D} \left(c \int u^+ dv + (1-c) \cdot 0 \right) \\ &\leq c \mathbb{D} \left(\int u^+ dv \right) \leq c \cdot \int \mathbb{D}(u^+) dv \\ &= \int \mathbb{D}(u^+) d\mu_x^{U_{i+1}} \leq \mathbb{D}\{u\}(x). \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von $\mathbb{D}$ folgt

$$\mathbb{D}(u_1(x)) = \lim \mathbb{D} \left(\int u^+ d\mu_x^{U_{i+1}} \right) \leq \mathbb{D}\{u\}(x)$$

und somit $u_1 \in \mathcal{H}^{\mathbb{D}}$.

(4.10) BEMERKUNG:

Im folgenden sei $\mathbb{D}$ stets eine isovexe Funktion.

Nach (4.3.2) ist für $f \in \mathcal{H}_X \cup \mathcal{H}_X^*$ die Funktion $\mathbb{D}(|f|)$

subharmonisch, also die Bedingung i) in der Definition

(4.2) stets erfüllt. $\mathcal{H}^{\mathbb{D}}$ ist eine konvexe Menge, aber i.a.

kein linearer Raum (vgl. (4.4)). Eine hinreichende Bedin-

gung dafür, daß $\mathcal{H}^{\mathbb{D}}$ ein Vektorraum ist, läßt sich durch

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{D}(2t)}{\mathbb{D}(t)} < \infty$$

angeben (vgl. (4.4)).

Für $1 \leq p \leq \infty$ sind die Räume $\mathcal{H}^p$ Vektorräume.

(4.11) DEFINITIONEN:

Für eine isovexe Funktion Φ bezeichne

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_w^\Phi &:= \{f \in \mathcal{H}_X : af \in \mathcal{H}^\Phi \text{ für alle } a > 0\}, \\ \mathcal{H}_m^\Phi &:= \{f \in \mathcal{H}_X : af \in \mathcal{H}^\Phi \text{ für ein } a > 0\}.\end{aligned}$$

Für eine komplexwertige oder numerische Funktion

f auf X sei für $i \in \mathbb{N}$

$$\|f\|_{\Phi} := \inf \left\{ \frac{1}{k} : 0 \leq k < \infty, \int \int_{\bar{U}_i} \Phi(k|f|) d\mu_X^{U_i+1} dr(x) \leq 1 \right\}$$

Offenbar sind $\mathcal{H}_w^\Phi$ und $\mathcal{H}_m^\Phi$ Vektorräume, $\mathcal{H}_w^\Phi$ ist der größte, der in $\mathcal{H}^\Phi$ enthalten ist, $\mathcal{H}_m^\Phi$ der kleinste, der $\mathcal{H}^\Phi$ enthält.

Für $f \in \mathcal{H}_X \cup \mathcal{H}_X$ ist $\Phi(|f|)$ subharmonisch und somit die Folge $(\|f\|_{\Phi})_{i \in \mathbb{N}}$ isoton. Wir setzen

$$\|f\|_{\Phi} := \sup_i \|f\|_{\Phi}.$$

(4.12) BEMERKUNG:

Für eine komplexwertige oder numerische Funktion f auf X sei $A_i := \left\{ \frac{1}{k} : 0 \leq k < \infty, \int \int_{\bar{U}_i} \Phi(k|f|) d\mu_X^{U_i+1} dr(x) \leq 1 \right\}$.

Dann folgt aus der Isotonie von Φ und dem Konvergenzsatz von B. Levi, daß A_i die folgende Gestalt hat:

$$A_i = \left[\|f\|_{\Phi}, \infty \right) \setminus \{0\}.$$

Insbesondere ist also

$$\|f\|_{\Phi} = \inf \left\{ \frac{1}{k} : 0 \leq k < \infty, \sup_i \int \int_{\bar{U}_i} \Phi(k|f|) d\mu_X^{U_i+1} dr(x) \leq 1 \right\}$$

(4.13) LEMMA:

Eine harmonische Funktion f liegt genau dann in

$$\mathcal{H}_m^{\mathbb{D}}, \text{ wenn } \|f\|_{\mathbb{D}} \text{ endlich ist.}$$

Beweis:

a) Sei $f \in \mathcal{H}_m^{\mathbb{D}}$, d.h. $af \in \mathcal{H}^{\mathbb{D}}$ für eine gewisse Zahl $a > 0$.

Nach (4.4) existiert eine Konstante M_1 mit

$$\int_{\overline{U}_i} \mathbb{D}(a|f|) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) \leq M_1 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Für $M_2 := \sup (1, M_1)$ ergibt sich aus der Konvexität von $\mathbb{D}$ und $\mathbb{D}(0)=0$

$$\begin{aligned} \int_{\overline{U}_i} \mathbb{D}\left(\frac{a}{M_2} |f|\right) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) &\leq \frac{1}{M_2} \int_{\overline{U}_i} \mathbb{D}(a|f|) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) \\ &\leq \frac{M_1}{M_2} \leq 1 \quad (i \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } \|f\|_{\mathbb{D}} = \sup_i \|f\|_{\mathbb{D}} \leq \frac{M_2}{a} < \infty.$$

b) Ist umgekehrt $\|f\|_{\mathbb{D}} < \infty$, so folgt aus (4.12) für $i \in \mathbb{N}$

$$\int_{\overline{U}_i} \mathbb{D}\left(\frac{1}{M} |f|\right) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) \leq 1,$$

$$\text{d.h. } \frac{1}{M} f \in \mathcal{H}_m^{\mathbb{D}}.$$

(4.14) LEMMA:

Für $i \in \mathbb{N}$ ist $\| \cdot \|_{\mathbb{D}}$ eine Halbnorm und $\| \cdot \|_{\mathbb{D}}$ eine Norm auf $\mathcal{H}_m^{\mathbb{D}}$.

Beweis:

a) Wir zeigen zunächst, daß für $i \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$f \rightsquigarrow \|f\|_{\mathbb{D}}$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{H}_m^{\mathbb{D}}$ definiert.

Sicherlich ist $\|0\|_{\mathbb{D}} = 0$.

Für $f \in \mathcal{H}_m^{\mathbb{D}}$, $\lambda \in \mathbb{D}$ und $k \geq 0$ ist die Ungleichung

$$\int_{\overline{U}_i} \int \mathbb{D}(k|f|) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) \leq 1$$

genau dann erfüllt, wenn

$$\int_{\overline{U}_i} \int \mathbb{D}(k'|\lambda f|) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) \leq 1$$

mit $k=k'|\lambda|$ gilt. Dies bedeutet aber gerade

$$|\lambda| \cdot {}_i \|f\|_{\mathbb{D}} = {}_i \|\lambda f\|_{\mathbb{D}}.$$

Seien nun $f, g \in \mathcal{H}_m^{\mathbb{D}}$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ derart, daß

$${}_i \|f\|_{\mathbb{D}} < c_1 \quad \text{und} \quad {}_i \|g\|_{\mathbb{D}} < c_2$$

ist. Wegen der Konvexität und Isotonie von $\mathbb{D}$ ergibt sich

unter Berücksichtigung von (4.12)

$$\begin{aligned} & \int_{\overline{U}_i} \int \mathbb{D}\left(\frac{|f+g|}{c_1+c_2}\right) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) \\ & \leq \int_{\overline{U}_i} \int \left[\frac{c_1}{c_1+c_2} \mathbb{D}\left(\frac{|f|}{c_1}\right) + \frac{c_2}{c_1+c_2} \mathbb{D}\left(\frac{|g|}{c_2}\right) \right] d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) \leq 1, \end{aligned}$$

d.h. ${}_i \|f+g\|_{\mathbb{D}} \leq c_1+c_2$.

Da dies für jede Wahl von c_1 und c_2 gilt, folgt die Dreiecksungleichung.

b) Da ${}_i \|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Halbnorm auf $\mathcal{H}_m^{\mathbb{D}}$ definiert, ist auch $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ eine Halbnorm.

Sei nun $\|f\|_{\mathbb{D}} = 0$ für eine Funktion $f \in \mathcal{H}_m^{\mathbb{D}}$. Nach a) ist für alle $i, n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\overline{U}_i} \int \mathbb{D}(n|f|) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) \leq 1,$$

d.h. $nf \in \mathcal{H}^{\mathbb{D}}$ (vgl. (4.4)).

Somit ist $(\mathbb{D}\{nf\})$ eine isotone Folge harmonischer Funktionen, deren r -Integrale alle kleiner gleich 1 sind. (vgl. (4.3.3)).

Nach (1.4) ist $h := \sup_n \mathbb{D}\{nf\}$ eine harmonische, insbesondere

also endliche Majorante von $n|f|$ ($n \in \mathbb{N}$). Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$ ist daher $f(x) = 0$ für alle $x \in X$.

Von nun an sei für die isovexe Funktion Φ der Vektorraum

$\mathcal{H}_m^\Phi$ stets mit der Norm $\|\cdot\|_\Phi$ versehen.

Zum Nachweis der Vollständigkeit von $\mathcal{H}_m^\Phi$ wird das folgende Lemma benötigt:

(4.15) LEMMA:

Für jede Folge (f_n) aus $\mathcal{H}_m^\Phi$ sind die beiden Aussagen äquivalent:

i) $\lim_n \|f_n\|_\Phi = 0.$

ii) Für jede reelle Zahl $a > 0$ ist

$$\lim_n \left\{ \sup_i \int_{\overline{U}_i} \int \Phi(a|f_n|) d\mu_{x^{i+1}}^{U_i} dr(x) \right\} = 0.$$

Beweis:

a) Sei $a > 0$ beliebig gewählt. Unter der Voraussetzung ii) existiert dann ein $n(a) \in \mathbb{N}$, derart daß

$$\sup_i \int_{\overline{U}_i} \int \Phi(a|f_n|) d\mu_{x^{i+1}}^{U_i} dr(x) \leq 1$$

für alle $n \geq n(a)$ gilt. Nach (4.12) ist also

$$\|f_n\|_\Phi \leq \frac{1}{a} \quad \text{für } n \geq n(a),$$

d.h. $\lim_n \|f_n\|_\Phi = 0.$

b) Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{H}_m^\Phi$ mit $\lim \|f_n\|_\Phi = 0$, $a > 0$

eine reelle Zahl. Dann existiert ein $n(a)$, so daß

$$\|f_n\|_\Phi \leq \frac{1}{a} \quad \text{für alle } n \geq n(a) \text{ gilt. Ist dann } \|f_n\|_\Phi > 0, \text{ so folgt}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(a|f_n|) &= \mathbb{Q}(a \cdot \|f_n\|_{\mathbb{Q}} \cdot \frac{|f_n|}{\|f_n\|_{\mathbb{Q}}}) \\ &\leq a \cdot \|f_n\|_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbb{Q}\left(\frac{|f_n|}{\|f_n\|_{\mathbb{Q}}}\right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wegen (4.12) für alle $n \geq n(a)$

$$\int_{\bar{U}_1} \int \mathbb{Q}(a|f_n|) d\mu_{x^{U_1+1}} dr(x) \leq a \cdot \|f_n\|_{\mathbb{Q}}$$

und somit die Aussage ii).

(4.16) SATZ:

$\mathcal{H}_m^{\mathbb{Q}}$ ist ein Banachraum, der $\mathcal{H}_w^{\mathbb{Q}}$ als abgeschlossenen Unterraum enthält.

Beweis:

Wegen (4.14) ist nur die Vollständigkeit von $\mathcal{H}_m^{\mathbb{Q}}$ und $\mathcal{H}_w^{\mathbb{Q}}$ nachzuweisen.

a) Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}_m^{\mathbb{Q}}$. Nach (4.15) ist

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\{ \sup_i \int_{\bar{U}_1} \int \mathbb{Q}(|f_n - f_m|) d\mu_{x^{U_1+1}} dr(x) \right\} = 0,$$

also ist für hinreichend große n, m die Funktion $f_n - f_m \in \mathcal{H}^{\mathbb{Q}}$, und aus (4.3.3) folgt

$$\lim_{n,m} \left(\int \mathbb{Q}\{f_n - f_m\} dr \right) = 0.$$

Somit konvergiert die Folge $\mathbb{Q}\{f_n - f_m\}$ nach (1.2) lokalgleichmäßig gegen Null.

Für alle n, m ist $\mathbb{Q}\{f_n - f_m\}$ eine Majorante zu $|f_n - f_m|$. Da $\mathbb{Q}$ stetig und streng isoton ist, bildet die Folge (f_n) wegen $\mathbb{Q}(0)=0$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Topologie τ_c , konvergiert also lokal-gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $f \in \mathcal{H}_X$.

Zu zeigen ist noch, daß f in $\mathcal{H}_m^{\mathbb{D}}$ liegt und daß die Folge (f_n) in der Normtopologie gegen f konvergiert.

Für jede Wahl von $n, n_0 \in \mathbb{N}$ ist $\|f_n\|_{\mathbb{D}} \leq \|f_{n_0}\|_{\mathbb{D}} + \|f_n - f_{n_0}\|_{\mathbb{D}}$, also existiert eine Konstante $k > 0$, so daß $\|f_n\|_{\mathbb{D}} \leq k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aus

$$\int_{\overline{U}_i} \int \mathbb{D} \left(\frac{1}{k} |f_n| \right) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) \leq 1 \quad (i, n \in \mathbb{N})$$

folgt aber nach dem Lemma von Fatou wegen der Stetigkeit von $\mathbb{D}$

$$\int_{\overline{U}_i} \int \mathbb{D} \left(\frac{1}{k} |f| \right) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) \leq 1 \quad (i \in \mathbb{N})$$

und somit $f \in \mathcal{H}_m^{\mathbb{D}}$. (vgl. (4.13)).

Zum Nachweis der Normkonvergenz der Folge (f_n) gegen f sei $a > 0$ beliebig gewählt. Nach (4.15) existiert dann eine Zahl $n(a) \in \mathbb{N}$ mit

$$\int_{\overline{U}_i} \int \mathbb{D}(a |f_n - f_m|) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) \leq 1$$

für alle $i, n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq n(a)$. Nach dem Lemma von Fatou ist dann für $n \geq n(a)$

$$\int_{\overline{U}_i} \int \mathbb{D}(a |f_n - f|) d\mu_x^{U_{i+1}} dr(x) \leq 1,$$

also $\|f_n - f\|_{\mathbb{D}} \leq \frac{1}{a}$ für alle i . Dies bedeutet aber gerade

$$\lim_n \|f_n - f\|_{\mathbb{D}} = 0$$

b) Liegt schließlich die Folge (f_n) in $\mathcal{H}_w^{\mathbb{D}}$, so ist auch $f \in \mathcal{H}_w^{\mathbb{D}}$:

Sei $a > 0$ beliebig gewählt. Wegen $\lim \|f_n - f\|_{\mathbb{D}} = 0$ existiert

nach (4.15) eine Zahl $k=k(a)$ mit

$$\sup_i \int_{\bar{U}_i} \int \mathbb{D}(2a|f-f_k|) d\mu_{x^{i+1}}^{U_i} dr(x) \leq 1.$$

Mit f_k liegt auch $2af_k$ in $\mathcal{H}_w^{\mathbb{D}} \subset \mathcal{H}^{\mathbb{D}}$, also gilt (vgl. (4.4))

$$\sup_i \int_{\bar{U}_i} \int \mathbb{D}(2a|f_k|) d\mu_{x^{i+1}}^{U_i} dr(x) < \infty.$$

Somit ist wegen der Konvexität von $\mathbb{D}$

$$\begin{aligned} & \sup_i \int_{\bar{U}_i} \int \mathbb{D}(a|f|) d\mu_{x^{i+1}}^{U_i} dr(x) \\ & \leq \sup_i \left\{ \frac{1}{2} \int_{\bar{U}_i} \int [\mathbb{D}(2a|f-f_k|) + \mathbb{D}(2a|f_k|)] d\mu_{x^{i+1}}^{U_i} dr(x) \right\} < \infty; \end{aligned}$$

nach (4.4) ist dann $af \in \mathcal{H}_w^{\mathbb{D}}$ für beliebiges $a > 0$, d.h. $f \in \mathcal{H}_w^{\mathbb{D}}$.

(4.17) BEMERKUNG:

Versieht man $\mathcal{H}^{\mathbb{D}}$ mit der Norm

$$\|f\|_{\infty} := \sup \{ |f(x)| : x \in X \}$$

so ist $\mathcal{H}^{\mathbb{D}}$ ebenfalls ein Banachraum.

Ist $\mathbb{D}_p$ die Abbildung $t \rightsquigarrow t^p$ mit $1 \leq p < \infty$, so folgt aus (4.13)

$$\|f\|_{\mathbb{D}_p} = \left(\int_{\bar{U}_i} \int |f|^p d\mu_{x^{i+1}}^{U_i} dr(x) \right)^{1/p}.$$

Im Spezialfall $p=2$ bildet $\mathcal{H}^2$ einen Hilbert-Raum, denn die $\mathbb{D}_2$ -Norm auf $\mathcal{H}^2$ ist gerade die durch das innere Produkt

$$(f, g) \rightsquigarrow \lim_i \int_{\bar{U}_i} \int f \bar{g} d\mu_{x^{i+1}}^{U_i} dr(x)$$

induzierte Norm (die Existenz dieser Limiten folgt z.B. aus (4.9) und (4.3.3)).

§ 5 Randeigenschaften von $\mathcal{H}^\mathbb{Q}$ -Funktionen

VORAUSETZUNG:

In diesem Paragraphen sei die Funktion 1 harmonisch.

$\tilde{\mu}_1$ bezeichne das zugehörige Darstellungsmaß bezüglich des normierten Bezugsmaßes r ; $\tilde{\mu}_1$ ist dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Martin-Rand $\tilde{\Delta}_e$.

Es wird nun das Verhalten harmonischer Funktionen am Martin-Rand näher untersucht. Zentraler Begriff ist hierbei die r -gleichmäßige Integrierbarkeit einer harmonischen Funktion.

(5.1) $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu}_1)$ bzw. $\mathcal{L}^\infty(\tilde{\mu}_1)$ sei wie üblich die Menge der $\tilde{\mu}_1$ -integrierbaren bzw. der $\tilde{\mu}_1$ -fast überall beschränkten komplexwertigen Funktionen auf dem Martin-Rand. Für jede isovexe Funktion $\mathbb{Q}$ bezeichne

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\mathbb{Q}(\tilde{\mu}_1) &:= \{ \tilde{f} : \tilde{f} \text{ ist } \tilde{\mu}_1\text{-meßbar und } \mathbb{Q}(|\tilde{f}|) \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}_1) \} \\ \mathcal{L}_m^\mathbb{Q}(\tilde{\mu}_1) &:= \{ \tilde{f} : a\tilde{f} \in \mathcal{L}^\mathbb{Q}(\tilde{\mu}_1) \text{ für ein } a > 0 \} .\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{Q}(t)}{t} > 0$ ist stets $\mathcal{L}^\mathbb{Q}(\tilde{\mu}_1) \subset \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}_1)$.

$L^1(\tilde{\mu}_1)$, $L^\infty(\tilde{\mu}_1)$, $L^\mathbb{Q}(\tilde{\mu}_1)$ und $L_m^\mathbb{Q}(\tilde{\mu}_1)$ bezeichne jeweils die Quotientenräume bezüglich der Äquivalenzrelation $\tilde{f} \sim \tilde{g} := \int |\tilde{f} - \tilde{g}| d\tilde{\mu}_1 = 0$.

Die zu einer Funktion $\tilde{f}$ gehörige Äquivalenzklasse werde mit $[\tilde{f}]$ bezeichnet.

(5.2) DEFINITION:

Für eine numerische oder komplexwertige Funktion $\tilde{f}$ auf dem Martin-Rand sei

$$\|\tilde{f}\|_{\tilde{\mathcal{Q}}} := \inf \left\{ \frac{1}{k} : k \gg 0, \int \mathbb{Q}(k|f|) d\tilde{\mu}_1 \leq 1 \right\}.$$

Ist $\tilde{f} = \tilde{g}$ $\tilde{\mu}_1$ -fast überall auf $\tilde{\Delta}_e$, so gilt offenbar

$$\|\tilde{f}\|_{\tilde{\mathcal{Q}}} = \|\tilde{g}\|_{\tilde{\mathcal{Q}}}. \text{ Für } \tilde{f} \in [\tilde{f}] \in L^{\mathbb{Q}}(\tilde{\mu}_1) \text{ ist daher}$$

$$\|[\tilde{f}]\|_{\tilde{\mathcal{Q}}} := \|\tilde{f}\|_{\tilde{\mathcal{Q}}}$$

wohldefiniert.

(5.3) BEMERKUNG:

Für eine isovexe Funktion $\mathbb{Q}$ lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

a) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{Q}(t)}{t} < \infty$, dann ist nach (4.8) $\mathcal{H}^{\mathbb{Q}} = \mathcal{H}^1$

und $\mathcal{H}^{\mathbb{Q}}_* = \mathcal{H}^1_*$.

b) $\mathbb{Q}$ ist streng isovex, dann ist nach (4.5) jede

Funktion aus $\mathcal{H}^{\mathbb{Q}} \cup \mathcal{H}^{\mathbb{Q}}_*$ r -gleichmäßig integrierbar.

(5.4) LEMMA:

Ist $\mathbb{Q}$ isovex, so existiert zu $f \in \mathcal{H}^{\mathbb{Q}}_m$ eine $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{L}^{\mathbb{Q}}_m$, für die $\tilde{\mu}_1$ -fast überall $\tilde{f} = f\text{-lim } f$ gilt.

Falls $\mathbb{Q}$ streng isovex ist, folgt $f = H_{\tilde{f}}$.

Beweis:

a) Jede Funktion $f \in \mathcal{H}^{\mathbb{Q}}$ ist nach (4.9) Linearkombination positiver Funktionen aus $\mathcal{H}^{\mathbb{Q}}$. Daher existiert nach (2.21) eine $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f} = f\text{-lim } f$ $\tilde{\mu}_1$ -fast überall.

Wendet man (2.21) auf die kleinste harmonische Majorante

von $\mathbb{Q}(|f|)$ an, so ergibt sich

$$\mathbb{Q}(|\tilde{f}(\tilde{k})|) \leq \tilde{h}(\tilde{k}) = \lim_{x \rightarrow \tilde{k}} \mathbb{Q}\{f\}(x) \quad \tilde{\mu}_1\text{-fast überall}$$

für eine $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktion $\tilde{h}$ auf dem Martin-Rand, d.h. $\tilde{f} \in \mathcal{L}^{\mathbb{Q}}(\tilde{\mu}_1)$.

b) Ist $\mathbb{Q}$ streng isovex und $f \in \mathcal{H}^{\mathbb{Q}}$, so ist nach (4.5)

f eine Linearkombination r -gleichmäßig integrierbarer, positiver harmonischer Funktionen. Somit ist nach dem Satz von Doob (3.8) $f = H_{\tilde{f}}$.

c) Wegen der Linearität der Limesbildung und der Lösung des Dirichlet-Problems folgt dann die Behauptung auch für $f \in \mathcal{H}_m^{\mathbb{Q}}$.

(5.5) SATZ:

Für jede streng isovexe Funktion $\mathbb{Q}$ definiert die Abbildung

$$\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} : [\tilde{f}] \longmapsto H_{\tilde{f}}$$

eine Isometrie zwischen $L_m^{\mathbb{Q}}(\tilde{\mu}_1)$ und $\mathcal{H}_m^{\mathbb{Q}}$ (bzw. $L^{\mathbb{Q}}(\tilde{\mu}_1)$ und $\mathcal{H}^{\mathbb{Q}}$).

Überdies ist für $\tilde{f} \in \mathcal{L}^{\mathbb{Q}}(\tilde{\mu}_1)$ $\mathbb{Q}\{H_{\tilde{f}}\} = H_{\mathbb{Q}(|\tilde{f}|)}$

und ${}_1\{H_{\tilde{f}}\} = H_{|\tilde{f}|}$.

Beweis:

a) Es ist $L_m^{\mathbb{Q}} \subset L^1$ und $\mathcal{H}_m^{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{H}^1$. Offenbar ist für $[\tilde{f}] \in L^1$ die Funktion $H_{\tilde{f}}$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $\tilde{f} \in [f]$. Somit ist $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ zunächst eine wohldefinierte Abbildung von $L_m^{\mathbb{Q}}$ in $\mathcal{H}^1$.

b) Gezeigt wird, daß $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}(L_m^{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{H}_m^{\mathbb{Q}}$ ist. Dazu genügt es wegen der Linearität von $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ zu zeigen, daß für $\tilde{f} \in \mathcal{L}^{\mathbb{Q}}$ die

harmonische Funktion H_f in $\mathcal{H}^0$ liegt.

Für $x \in X$ ist $\tilde{v}_x := \tilde{K}_x^r \tilde{\mu}_1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Martin-Rand. Wegen $\mathbb{Q}(|\tilde{f}|) \in \mathcal{L}^1$ folgt aus der Jensen-schen Ungleichung für $f := H_{\tilde{f}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(|f(x)|) &= \mathbb{Q}(|H_{\tilde{f}}(x)|) = \mathbb{Q}\left(\left|\int \tilde{f} d\tilde{v}_x\right|\right) \leq \mathbb{Q}\left(\int |\tilde{f}| d\tilde{v}_x\right) \\ &\leq \int \mathbb{Q}(|\tilde{f}|) d\tilde{v}_x = H_{\mathbb{Q}(|\tilde{f}|)}(x). \end{aligned}$$

Nach (2.23) besitzt also $\mathbb{Q}(|f|)$ eine harmonische r -integrierbare Majorante, d.h. $f \in \mathcal{H}^0$.

c) Nach (5.4) ist $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$ sogar eine Bijektion zwischen L_m^0 und $\mathcal{H}_m^0$. Da die konstante Funktion 1 harmonisch ist, übertragen sich die bisherigen Resultate wegen $L^0 \subset L^2$ und $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^2$ auch auf den Fall L^0 und $\mathcal{H}^0$.

d) Aus b) folgt insbesondere für $\tilde{f} \in \mathcal{L}^0$ die Abschätzung $\mathbb{Q}(|H_{\tilde{f}}|) \leq \mathbb{Q}\{H_{\tilde{f}}\} \leq H_{\mathbb{Q}(|\tilde{f}|)}$. Wegen der Stetigkeit von $\mathbb{Q}$ und (2.20) folgt

$$f\text{-}\lim \mathbb{Q}\{H_{\tilde{f}}\} = \mathbb{Q}(|\tilde{f}|) \quad \tilde{\mu}_1\text{-fast überall,}$$

also nach (3.9)

$$H_{\mathbb{Q}(|\tilde{f}|)} = \mathbb{Q}\{H_{\tilde{f}}\}.$$

Analog gilt wegen $|H_{\tilde{f}}| = \left| \int \tilde{f} \tilde{K}_x^r d\tilde{\mu}_1 \right| \leq \int |\tilde{f}| \tilde{K}_x^r d\tilde{\mu}_1 = H_{|\tilde{f}|}$:

$$H_{|\tilde{f}|} = \mathbb{Q}\{H_{\tilde{f}}\}.$$

e) Zu zeigen ist noch die Normtreue der Abbildung $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$ und $\|\tilde{f}\|_{\tilde{\mathcal{Q}}} = \|H_{\tilde{f}}\|_{\mathbb{Q}}$ für $\tilde{f} \in \mathcal{L}^0$.

Sei zunächst $\tilde{f} \in \mathcal{L}_m^0$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege $\tilde{f}$ bereits in $\mathcal{L}^0$. Dann ist nach dem Satz von Fubini und d)

$$\begin{aligned} \int \mathbb{Q}\{H_{\tilde{f}}\} d\mathbf{r} &= \int H_{\mathbb{Q}(|\tilde{f}|)} d\mathbf{r} = \iint \mathbb{Q}(|\tilde{f}|) \tilde{K}_x^r d\tilde{\mu}_1 d\mathbf{r}(x) \\ &= \int \left(\int \tilde{K}_x^r d\mathbf{r}(x) \right) \mathbb{Q}(|\tilde{f}|) d\tilde{\mu}_1 = \int \mathbb{Q}(|\tilde{f}|) d\tilde{\mu}_1, \end{aligned}$$

also wegen (4.3.3) und (4.12)

$$\begin{aligned} \|H_{\tilde{f}}\|_{\mathbb{Q}} &= \inf \left\{ \frac{1}{k} : k \geq 0, \int \mathbb{Q}\{H_{k\tilde{f}}\} d\mathbf{r} \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{1}{k} : k \geq 0, \int \mathbb{Q}(k|\tilde{f}|) d\tilde{\mu}_1 \leq 1 \right\} = \|\tilde{f}\|_{\tilde{\mathcal{Q}}}. \end{aligned}$$

Für $\tilde{f} \in \mathcal{L}^\infty$ ist $\|\tilde{f}\|_\infty = \sup \{k : \tilde{\mu}_1([\tilde{f}] > k) > 0\}$. Da $f\text{-}\lim H_{\tilde{f}} = \tilde{f}$ $\tilde{\mu}_1$ -fast überall auf dem Martin-Rand gilt, folgt zunächst

$$\|H_{\tilde{f}}\|_\infty = \sup_{x \in X} |H_{\tilde{f}}(x)| \geq \|\tilde{f}\|_\infty.$$

Die Behauptung ergibt sich dann aus

$$\|H_{\tilde{f}}\|_\infty = \sup_{x \in X} \left| \int \tilde{f} \tilde{K}_x^T d\tilde{\mu}_1 \right| \leq \|\tilde{f}\|_\infty \sup_x \int \tilde{K}_x^T d\tilde{\mu}_1 = \|\tilde{f}\|_\infty.$$

Ist $\mathbb{Q}$ eine isovexe, aber nicht streng isovexe Funktion, so gilt $\mathcal{H}^\mathbb{Q} = \mathcal{H}^1$ (vgl. (5.3)). Für eine Funktion $f \in \mathcal{H}^1$ sind die Aussagen des Satzes (5.5) nicht allgemein richtig - dies hat seine Ursache darin, daß f nicht notwendig r -gleichmäßig integrierbar ist (vgl. (3.8) und (3.10)). Auf Grund der Integraldarstellung für die positiven harmonischen Funktionen ergibt sich lediglich:

(5.6) SATZ:

Eine Funktion $f \in \mathcal{H}_X$ gehört genau dann zu $\mathcal{H}^1$, wenn ein beschränktes (komplexes) reguläres Borelmaß $\tilde{\mu}_f$ auf dem Martin-Rand existiert, das folgende Eigenschaften besitzt:

- i) $\tilde{\mu}_f$ wird von $\tilde{\Delta}_e^r$ getragen,
- ii) für alle $x \in X$ ist $f(x) = \int \tilde{K}_x^T d\tilde{\mu}_f$.

$\tilde{\mu}_f$ ist eindeutig bestimmt ($\tilde{\mu}_f$ ist das Darstellungsmaß zu f (bezüglich r)).

Beweis:

Die Behauptung folgt aus (2.11), falls man folgendes berücksichtigt:

- a) Jede Funktion aus $\mathcal{H}^1$ ist eine komplexe Linearkombination positiver Funktionen aus $\mathcal{H}^1$ (4.9).
- b) Jedes komplexe, beschränkte reguläre Borelmaß $\tilde{\mu}$ auf dem Martin-Rand hat die Gestalt $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2 + i(\tilde{\mu}_3 - \tilde{\mu}_4)$, wobei die Maße $\tilde{\mu}_i$ positive, beschränkte reguläre Borelmaße sind, die von der gleichen Menge getragen werden wie $\tilde{\mu}$.
- c) $\mathcal{H}^1$ ist ein Vektorraum, der die positiven, r -integrierbaren Funktionen enthält.

(5.7) BEMERKUNG:

Für jede Funktion $f \in \mathcal{H}^1$ existiert nach (5.4) eine $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktion $\tilde{f}$ auf dem Martin-Rand mit $\tilde{f} = f\text{-limf}$ $\tilde{\mu}_1$ -fast überall. Bezeichnet $\tilde{\mu}_f$ das Darstellungsmaß zu f , so gilt folgendes:

- i) Ist f r -gleichmäßig integrierbar, d.h. $f \in \mathcal{H}^0$ für eine gewisse streng isovexe Funktion $\mathbb{Q}$, so ist

$$\tilde{\mu}_f = \tilde{f} \tilde{\mu}_1.$$

- ii) Im allgemeinen Fall hat $\tilde{\mu}_f$ die Gestalt

$$\tilde{\mu}_f = \tilde{f} \tilde{\mu}_1 + \tilde{\nu},$$

wobei $\tilde{\nu}$ singulär zu $\tilde{\mu}_1$ ist.

Beweis:

Teil i) folgt aus (5.4).

Teil ii) ergibt sich aus (5.6) und (3.10):

Zunächst kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit f als positiv annehmen. Ist

$$\tilde{\mu}_f = \tilde{g} \tilde{\mu}_1 + \tilde{\nu}$$

die Lebesgue-Zerlegung von $\tilde{\mu}_f$ bezüglich $\tilde{\mu}_1$, so gilt offenbar

$$f(x) = H_{\tilde{g}}(x) + \int_X K_x^T d\tilde{\nu} \quad \text{für alle } x \in X.$$

$\tilde{v}$ ist singularär zu $\tilde{\mu}_1$, also gilt nach (3.10) $\tilde{\mu}_1$ -fast überall auf dem Martin-Rand $0 = f\text{-}\lim \int \tilde{K}_x^T d\tilde{v}$ und somit

$$\tilde{f} = f\text{-}\lim H_{\tilde{g}} = \tilde{g} .$$

(5.8) KOROLLAR:

Sei $\mathbb{D}$ eine isovexe Funktion und $s \in \mathcal{H}_*^{\mathbb{D}}$. Dann gilt:

i) Es existiert eine Funktion $\tilde{s} \in \mathcal{L}^{\mathbb{D}}$ mit

$$\tilde{s} = f\text{-}\lim s \quad \tilde{\mu}_1\text{-fast überall auf } \tilde{\Delta}_e .$$

ii) Ist $\mathbb{D}$ sogar streng isovex, so gilt

$$\gamma\{s\} = H_{\tilde{s}} ,$$

$$\mathbb{D}\{s\} = H_{\mathbb{D}(\tilde{s})} .$$

Beweis:

Wegen $\mathcal{H}_*^{\mathbb{D}} \subset \mathcal{H}_*^1$ (vgl. (4.6.iv)) ist

$$s + p_1 = \gamma\{s\} \quad \text{und} \quad \mathbb{D}(s) + p_{\mathbb{D}} = \mathbb{D}\{s\}$$

für gewisse Potentiale p_1 und $p_{\mathbb{D}}$.

Nun ist für jedes Potential p nach (2.21) $f\text{-}\lim p = 0$

$\tilde{\mu}_1$ -fast überall auf dem Martin-Rand, also folgt aus (5.4)

und (5.5) die Behauptung.

§ 6 Anwendungen

Wie in §5 seien die konstanten Funktionen harmonisch;

$\tilde{\mu}_1$ bezeichne das Darstellungsmaß der 1 bezüglich des normierten Bezugsmaßes r .

In den vorangegangenen Paragraphen wurde die $\mathcal{X}^0$ -Theorie, wie sie L.LUMER-NAIM in [16] für Brelotsche harmonische Räume entwickelte, auf die harmonischen Räume übertragen, die der Axiomatik von H.BAUER genügen.

Wie in [16] werden nun mit Hilfe der "strongly subharmonic functions" von L.GÅRDING, L.HÖRMANDER [10] ein allgemeines Pragmaen-Lindelöf-Prinzip sowie ein F. und M.Riesz-Theorem hergeleitet.

(6.1) DEFINITION:

Eine positive subharmonische Funktion s heiße S-subharmonisch (strongly subharmonic in [10]), wenn eine positive, streng isotone konvexe Funktion ψ auf $\mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

- i) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{t} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) = 0$
- ii) $\psi^{-1}(s)$ ist subharmonisch in X .

ψ heiße dann zu s gehörige S-Funktion.

(6.2) SATZ:

Sei s eine S -subharmonische Funktion mit einer zugehörigen S -Funktion γ sowie λ eine positive r -gleichmäßig integrierbare Funktion auf X mit $s \leq \gamma \circ \lambda$. Dann gilt:

- i) Es existiert eine reelle Funktion $\tilde{s}$ auf dem Martin-Rand mit

$$\gamma^{-1}(\tilde{s}) \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}_1),$$

$$\tilde{s} = f\text{-}\lim s \quad \tilde{\mu}_1\text{-fast überall auf } \tilde{\Delta}_0.$$

$$s \leq \gamma \circ H_{\gamma^{-1}(\tilde{s})}.$$

- ii) Ist $\tilde{s} \in \mathcal{L}^\mathbb{W}(\tilde{\mu}_1)$ für eine isovexe Funktion $\mathbb{W}$, so ist $s \leq H_{\tilde{s}}$ und $s \in \mathcal{H}_*^\mathbb{W}$.

Für $\tilde{s} \in \mathcal{L}^\mathbb{W}(\tilde{\mu}_1)$ ist $s \leq H_{\tilde{s}}$ und s beschränkt.

Beweis:

- a) Offenbar ist

$$0 \leq s_0 := \sup (\gamma^{-1}(s), 0) \leq \lambda,$$

d.h. $s_0 \in \mathcal{H}_*^\mathbb{W}$ für eine gewisse streng isovexe Funktion $\mathbb{W}$ (vgl. (3.4.iii), (4.4)).

Nach (5.8) existiert dann eine reelle Funktion $\tilde{s}_0 \in \mathcal{L}^1$ mit

$$\tilde{s}_0 = f\text{-}\lim s_0 = f\text{-}\lim H_{\tilde{s}_0} \quad \tilde{\mu}_1\text{-fast überall},$$

so daß $H_{\tilde{s}_0}$ die kleinste harmonische Majorante zu s_0 ist.

Wegen $\gamma^{-1}(s) \leq s_0$ ist $H_{\tilde{s}_0} - \gamma^{-1}(s)$ eine positive super-

harmonische Funktion auf X , zu der es nach (2.21) eine

Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ gibt mit

$$\tilde{f} = f\text{-}\lim (H_{\tilde{s}_0} - \gamma^{-1}(s)) \quad \tilde{\mu}_1\text{-fast überall}.$$

Für $\tilde{s} := \gamma(\tilde{s}_0 - \tilde{f})$ ist $\gamma^{-1}(\tilde{s}) = \tilde{s}_0 - \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$. Aus der Stetigkeit

von γ bzw. γ^{-1} und der Endlichkeit der Limiten folgt $\tilde{\mu}_1$ -fast

überall auf dem Martin-Rand

$$\begin{aligned}\tilde{s} &= \psi(\tilde{s}_0 - \tilde{f}) = \psi(f\text{-}\lim \{ s_0 - H_{\tilde{s}_0} + \psi^{-1}(s) \}) \\ &= \psi(f\text{-}\lim \psi^{-1}(s)) = f\text{-}\lim s.\end{aligned}$$

b) Mit s_0 besitzt auch $\psi^{-1}(s)$ eine harmonische Majorante, die r -integrierbar ist. Bezeichnet h die kleinste harmonische Majorante zu $\psi^{-1}(s)$, so ist $h = \psi^{-1}(s) + p$ für ein gewisses Potential p auf X . Nach (2.21) ist daher

$$\psi^{-1}(\tilde{s}) = f\text{-}\lim \psi^{-1}(s) = f\text{-}\lim h \quad \tilde{\mu}_1\text{-fast überall.}$$

Da $H_{\tilde{s}_0}$ (die kleinste) harmonische Majorante zu s_0 ist, folgt aus $\psi^{-1}(s) \leq s_0$ die Ungleichung $h \leq H_{\tilde{s}_0}$. Somit ist $h_{\tilde{s}_0} - h$ eine Oberfunktion zu $\tilde{s}_0 - \psi^{-1}(\tilde{s})$, insbesondere ist also

$$H(\tilde{s}_0 - \psi^{-1}(\tilde{s})) \leq H_{\tilde{s}_0} - h,$$

oder auch

$$h \leq H_{\psi^{-1}(\tilde{s})}.$$

Da h eine harmonische Majorante zu $\psi^{-1}(s)$ ist, ergibt sich die gesuchte Abschätzung

$$s \leq \psi \circ H_{\psi^{-1}(\tilde{s})}$$

aus der Isotonie von ψ .

c) Sei nun für eine isovexe Funktion $\mathbb{D}$ $\tilde{s} \in \mathcal{L}^{\mathbb{D}}$, d.h.

$$\mathbb{D}(\tilde{s}), \tilde{s} \in \mathcal{L}^1.$$

Dann folgt mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung aus b)

$$0 \leq \mathbb{D}(s) \leq (\mathbb{D} \circ \psi) H_{\psi^{-1}(\tilde{s})} \leq H_{\mathbb{D}(\tilde{s})} \in \mathcal{K}^1,$$

d.h. $s \in \mathcal{K}^{\mathbb{D}}$ (vgl. (4.2)).

Für $\tilde{s} \in \mathcal{L}^{\mathbb{D}} \subset \mathcal{L}^2$ ist nach (5.8)

$$0 \leq s \leq \psi \{s\} = H_{\tilde{s}},$$

also s wegen der Harmonizität der Konstanten eine beschränkte Funktion.

(6.3) SATZ:

Jede S-subharmonische Funktion $s \in \mathcal{H}_*^1$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz (6.2).

Überdies ist $\tilde{s}$ in $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu}_1)$ und $H_{\tilde{s}}$ die kleinste harmonische Majorante von s.

Beweis:

Für eine zu s gehörige S-Funktion ist die Abbildung

$$\mathbb{D} : t \rightsquigarrow \gamma(t) - \gamma(o) \quad (t \geq 0)$$

eine streng isovexe Funktion.

Die Funktion $s_o := \sup (\gamma^{-1}(s), o)$ liegt wegen $s \in \mathcal{H}_*^1$ und $0 \leq \mathbb{D}(s_o) \leq s$ in $\mathcal{H}_*^1$.

Insbesondere ist s_o r-gleichmäßig integrierbar und $s \leq \gamma \circ s_o$, d.h. die Voraussetzungen zu (6.2) sind erfüllt.

Wegen $s \in \mathcal{H}_*^1$ ist nach (5.8) $\tilde{s} \in \mathcal{L}^1$, also folgt aus (6.2.i) unter Benutzung der Jensenschen Ungleichung $s \leq H_{\tilde{s}}$.

Nun gilt nach (6.2.i) für jede harmonische Funktion h mit

$$s \leq h \leq H_{\tilde{s}}$$

$\tilde{\mu}_1$ -fast überall auf dem Martin-Rand $f\text{-}\lim h = f\text{-}\lim s = \tilde{s}$ und daher nach (3.9)

$$h = H_{\tilde{s}},$$

d.h. $H_{\tilde{s}}$ ist die kleinste harmonische Majorante zu s.

Eine harmonische Funktion aus $\mathcal{H}^1$ ist nicht stets eine Lösung des Dirichlet-Problems für eine auf dem Martin-Rand definierte Funktion (vgl. (5.7)). Es gilt jedoch das folgende F. und M. Riesz Theorem:

(6.4) KOROLLAR:

Ist für f aus $\mathcal{H}^1$ $|f|$ eine S -subharmonische Funktion,
so gilt

$$f = H_{\tilde{f}}$$

für eine $\tilde{\mu}_1$ -integrierbare Funktion $\tilde{f}$ auf dem Martin-
Rand (d.h. $\tilde{f}\tilde{\mu}_1$ ist das Darstellungsmaß zu f). Dabei
ist $\tilde{f} = f\text{-}\lim f$ $\tilde{\mu}_1$ -fast überall.

Beweis:

Für $f \in \mathcal{H}^1$ ist nach (4.2) $|f| \in \mathcal{H}_*^1$, also wegen (6.3)

$|f| \leq H_{|\tilde{f}|}$. Mit $H_{|f|}$ ist dann auch $|f|$ und somit f eine
 r -gleichmäßig integrierbare Funktion, also

$$f = H_{\tilde{f}}$$

für die im Korollar angegebene Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ (vgl. (3.8),
(3.4.iii) und (5.4)).

(6.5) BEISPIELE:

- 1) Im klassischen Fall beinhaltet (6.4) gerade das F. und
M.Riesz Theorem (vgl. L.Lumer-Naim ([16], cor.15.1):

Sei f eine holomorphe Funktion in der offenen Einheits-
kreisscheibe der Ebene.

Dann ist f harmonisch bezüglich des Brelotschen Raumes
der Lösungen der Laplace-Gleichung im Einheitskreis.

Als Bezugsmaß wähle man die Einheitsmasse im Nullpunkt
 ξ_0 . Nun ist der Martin-Rand dieses harmonischen Raumes
gerade der Kreisrand, und das Darstellungsmaß der har-
monischen Funktion 1 (bezüglich ξ_0) ist gegeben durch
das zu 1 normierte Lebesgue-Maß .

$|f|$ ist S -subharmonisch für die S -Funktion
 $\Upsilon(t) := \exp t$ (vgl. W. RUDIN [20], theorem 17.3).
 Besitzt $|f|$ eine harmonische Majorante, d.h. liegt f
 in $\mathcal{H}^1(\mathcal{E}_0)$, so existiert für f ein komplexes Darstel-
 lungsmaß $\tilde{\mu}_f$ auf dem Kreisrand (bezüglich $\mathcal{E}_0$). Somit
 liefert das Korollar (6.4):

SÄTZ (F. und M. RIESZ) :

Jede im Einheitskreis holomorphe Funktion aus
 $\mathcal{H}^1(\mathcal{E}_0)$ besitzt ein Darstellungsmaß, das absolut-
 -stetig zum Lebesguemaß ist.

2) Den Satz (6.2) und somit auch (6.3) kann man als
 Phragmen-Lindelöf-Prinzip interpretieren:

Sei h eine positive harmonische Funktion. Dann exi-
 stiert offenbar ein normiertes Bezugsmaß r auf X ,
 für welches h r -integrierbar ist. Es bezeichne $\tilde{\mu}_1$
 das Darstellungsmaß der harmonischen Funktion 1 auf
 dem Martin-Rand bezüglich r .

Für $0 < a < 1$ ist die Abbildung $\mathbb{Q}: t \rightsquigarrow t^{1/a}$ eine reelle
 isotone Funktion auf $\mathbb{R}_+$ mit $\mathbb{Q}(0) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{Q}(t)}{t} = \infty$,
 also ist wegen der Harmonizität von h nach (3.4.iii)
 h^a eine r -gleichmäßig integrierbare Funktion. Somit
 ergibt sich aus (6.2) das folgende Pragmen-Lindelöf-
 -Prinzip:

SATZ: Ist s eine positive subharmonische Funktion, für die $\log s$ subharmonisch ist, und die der Wachstumsbeschränkung

$$(WB) \quad s \leq \exp(h^a)$$

genügt, so folgt aus

$f\text{-}\liminf s \leq 1$ $\tilde{\mu}_1$ -fast überall auf $\tilde{\Delta}_e$
bereits

$$s \leq 1.$$

Offenbar hängt die Güte dieses Satzes davon ab, daß für h eine möglichst stark anwachsende harmonische Funktion gefunden wird.

Für holomorphe Funktionen in der Ebene (dort sind $|f|$ und $\log |f|$ stets subharmonisch) finden sich derartige Sätze beispielsweise bei W. RUDIN ([20], (12.7) und (12.9)).

- 3) M.H. PROTTER, H.F. WEINBERGER beweisen in [18] (II§9 und III§6) Sätze vom Typ Phragmen-Lindelöf für Funktionen, die subharmonisch bezüglich gewisser elliptischer oder parabolischer partieller Differentialgleichungen in Gebieten des $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 1$) sind. Für den Fall der Wärmeleitungs-Gleichung soll im folgenden eine konkrete Version des Satzes von Phragmen-Lindelöf aus (6.5.2) hergeleitet werden:
- Sei $0 < t_0 < \infty$, $X := \mathbb{R}^n \times]t_0, t_0[$, $\mathcal{H}$ das Garbendatum der Lösungen der Wärmeleitungs-Gleichung in X .

$(X, \mathcal{H})$ ist ein harmonischer Raum mit dem Martin-Rand $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, die extremalen harmonischen Funktionen sind alle Vielfachen von

$$h_a(x, t) := t^{-n/2} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4t}\right) \quad (a \in \mathbb{R}^n, (x, t) \in X)$$

(siehe M. SIEVEKING [21], S. 59).

SATZ: Seien $c, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ sowie s eine subharmonische Funktion mit

$$(WB)' \quad s(x, t) \leq \exp(\sum c_i x_i + 2 \sum c_i^2 t + c) \text{ auf } X.$$

Ist N eine höchstens abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so folgt aus

$$\lim_{(x, t) \rightarrow (z, 0)} \sup s(x, t) \leq 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^n \setminus N$$

bereits

$$s(x, t) \leq 0 \quad \text{für alle } (x, t) \in X.$$

Beweis:

Für $c, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$h(x, t) := \exp(2 \sum c_i x_i + 4 \sum c_i^2 t + 2c)$$

harmonisch auf X , also r -integrierbar für ein geeignetes normiertes Bezugsmaß r .

Bezeichnet $\tilde{\mu}_1$ das Darstellungsmaß der 1 bezüglich r , so sind einpunktige Teilmengen des Martin-Randes $\tilde{\mu}_1$ -Nullmengen, denn wäre für ein $\tilde{k} \in \tilde{\Sigma}_e$ die Einheitsmasse $\mathcal{E}_k$ absolut-stetig bezüglich $\tilde{\mu}_1$, so wäre die zugehörige extremale harmonische Funktion beschränkt.

Dann ist aber die im Satz auftretende Menge $N \times \{0\}$ eine $\tilde{\mu}_1$ -Nullmenge.

$h^{1/2}$ ist r -gleichmäßig integrierbar, und nach Voraussetzung (WB)' gilt auf X $\exp(s) \leq \exp(h^{1/2})$.

Es ist $\exp(s)$ eine positive subharmonische Funktion (siehe (1.6)), deren Logarithmus ebenfalls subharmonisch ist. $s \leq 0$ gilt genau dann, wenn $\exp(s) \leq 1$ ist. Die Behauptung des Satzes folgt nun aus (6.5.2), falls

$$\liminf_{(x,t) \rightarrow (z,o)} \exp(s(x,t)) \leq 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^n \setminus N$$

nachgewiesen ist .

Dies ergibt sich aber aus der Tatsache, daß der co-fine Umgebungsfiler eines Punktes (z,o) des Martin-Randes feiner ist als der Schnitt des Umgebungsfilters von (z,o) im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit X (vgl. (2.25.b)).

Die in diesem Satz auftretende Wachstumsbeschränkung (WB)' ist stärker als die in [18] (§6 theorem 1o) benötigte

$$(WB)'' \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \inf \{ \exp(-cR^2) \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ 0 \leq t \leq t_0}} s(x,t) \} \leq 0 .$$

Mit (WB)'' an Stelle von (WB)' bleibt dieser Satz (unter Beibehaltung der Ausnahmemenge N) jedoch nicht gültig, wie man aus dem folgenden Gegenbeispiel ersieht:

$s(x,t) := t^{-n/2} \exp(-\frac{x^2}{4t})$ ist harmonisch auf X , und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{(x,t) \rightarrow (z,o)} s(x,t) &= 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \inf \{ \exp(-R^2) \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ 0 \leq t \leq t_0}} t^{-n/2} \exp(-\frac{R^2}{4t}) \} &= 0 . \end{aligned}$$

Dennoch gilt $s(x,t) \leq 0$ für kein $(x,t) \in X$.

Literatur

Bauer, H.:

- [1] Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie.
Lecture notes in Mathematics 22. Springer Verlag
Berlin - Heidelberg - New York (1966).
- [2] Konvexität in topologischen Vektorräumen.
Vorlesungsausarbeitung. Hamburg (1964).

Bourbaki, N.:

- [3] Topologie générale I,II, 4^e édition.
- [4] Topologie générale IX, 2^e édition.
- [5] Intégration I-IV, 2^e édition.
- [6] Espaces vectoriels topologiques I,II, 2^e édition.
Hermann, Paris.

Brelot, N.:

- [7] Intégrabilité uniforme.
Séminaire Théorie du potentiel, Paris (1961/62).

Choquet, G.:

- [8] Axiomatique des mesures maximales.
C.R.Acad.Sc. de Paris (1962) p.37-39.

Doob, J.L.:

- [9] Probability methods applied to the first boundary
value problem. Third Berkeley Symp. on Math.
Statistics and Prob. 2 (1954/55) p.49-80.

Gårding, L., Hörmander, L.:

- [10] Strongly subharmonic functions.
Math. Scand. 15 (1964) p.93-96.

Gowrisankaran, K.:

- [11] Extreme harmonic functions and boundary value problems. Ann. Inst. Fourier 13/2 (1963) p.307-356.
- [12] Fatou-Naim-Doob limit theorems in the axiomatic system of Brelot. Ann. Inst. Fourier 16/2 (1966) p.455-467.

Hofmann, K.:

- [13] Banach spaces of analytic functions. Prentice-Hall (1962).

Lembcke, J.:

- [14] Konservative Abbildungen und Fortsetzung regulärer Maße. Dissertation der Universität Erlangen (1969).

Lumer-Naim, L.:

- [15] Fonctions sous-analytique, classes H^0 , principe de Phragmen-Lindelöf. C.R.Acad.Sc. de Paris 262 (1962) p.1167.
- [16] H^D spaces of harmonic functions. Ann. Inst. Fourier 17/2 (1967) p.425-469.

Meyer, P.A.:

- [17] Probabilités et potentiel. Hermann, Paris (1966).

Protter, M.H., Weinberger, H.F.:

- [18] Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall (1967).

Phelps, R.R.:

- [19] Lectures on Choquet's theorem. Van Nostrand (1966).

Rudin, W.:

- [20] Real and complex analysis. Mc Graw Hill (1966).

Sieveking, M.:

- [21] Integraldarstellung superharmonischer Funktionen mit Anwendung auf parabolische Differentialgleichungen. Lecture notes in Mathematics 69 (1968). Springer Verlag Berlin - Heidelberg - New York.

Symbolliste

Es wird jeweils auf die Seite verwiesen,
auf der das Symbol eingeführt wird.

$\mathcal{H}_r, \mathcal{H}_r^1$	9
$\triangle^r, \triangle_e, \triangle_e^r$	10
$\tilde{\triangle}_e, \tilde{\triangle}_e^r$	15
$\tilde{K}_X^r$	16
$\tilde{\mu}_h$	17
$\tau_{\tilde{K}}, \mathcal{O}_{\tilde{f}}, \bar{H}_{\tilde{f}}, H_{\tilde{f}}$	20, 21
r-g.i.	26
$\mathbb{Q}^{\mathcal{H}_X}, {}_{+*}\mathcal{H}_X$	34
$\mathbb{Q}$, isovex, streng isovex	34
$\mathcal{H}^{\mathbb{Q}}(r), \mathcal{H}_*^{\mathbb{Q}}(r), \mathcal{H}^p, \mathcal{H}_*^p$	35
$\mathcal{H}_w^{\mathbb{Q}}, \mathcal{H}_m^{\mathbb{Q}}$	38
$i \ f \ _{\mathbb{Q}}, \ f \ _{\mathbb{Q}}$	38
$\mathcal{L}^p(\tilde{\mu}_1), \mathcal{L}^{\mathbb{Q}}(\tilde{\mu}_1), \mathcal{L}_m^{\mathbb{Q}}(\tilde{\mu}_1)$	45
$[\tilde{f}]$	45
$\ \tilde{f} \ _{\tilde{\mathbb{Q}}}, \ [\tilde{f}] \ _{\tilde{\mathbb{Q}}}$	46
γ , S-Funktion	52

Lebenslauf

Am 9.3.1942 wurde ich als Sohn des Lokomotivheizers Eduard Janßen und seiner Ehefrau Margarete, geb. Brandner, in Beelitz (Mark Brandenburg) geboren.

Nach dem Besuch einer Volksschule und der Max-Planck-Schule in Wilhelmshaven erhielt ich im Februar 1961 das Reifezeugnis.

Anschließend begann ich an der Universität Hamburg ein Mathematikstudium. Ich hörte Vorlesungen der Professoren H.Bauer, L.Collatz, H.Karzel und C.F.von Weizsäcker und legte im Juli 1964 die Diplom-Vorprüfung ab. Zum Wintersemester 1965/66 wechselte ich zur Universität Erlangen-Nürnberg, an der ich im Februar 1967 die Diplom-Prüfung für Mathematik bestand.

Vom Oktober 1965 bis zum Juli 1969 war ich als studentische bzw. wissenschaftliche Hilfskraft und seitdem als Verwalter einer Assistentenstelle am mathematischen Institut in Erlangen beschäftigt. Seit dem Frühjahr 1967 bin ich Doktorand bei Herrn Professor Dr.H.Bauer.

Offsetdruck-Fotodruck

1. Hogn, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
